Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 3. Juli 2024, 10:00 Uhr

Übung 10 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

FSK10-1 *Satz von Rice* (2 Punkte)

Sei $M = (Z, \{a, b\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine deterministische Turingmaschine. Welche der folgenden Fragestellungen zu M sind entscheidbar?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit unentscheidbarer Fragestellungen mittels des Satzes von Rice. Bei entscheidbaren Fragestellungen erläutern Sie, wie die charakteristische Funktion berechnet wird.

a) Die Funktion die von M berechnet wird hat mindestens 3 Fixpunkte. Ein Fixpunkt einer Funktion $f : D \to D$ ist ein $x \in D$, sodass $f(x) = x$.

b) Totalitätsproblem: Es gibt ein Wort $w \notin L(M)$.

c) Hat M einen Müllzustand? Formal definieren wir einen Müllzustand hier als einen Zustand z, der kein Endzustand ist und für den gilt $\delta(z, a) \subseteq \{z\}$ für alle a.

d) Ist die Funktion die von M berechnet wird in $\mathsf{O}(n^2)$?

e) M terminiert auf jeder Eingabe nach zwischen 50 und 55 Schritten.

FSK10-2 *Entscheidbarkeit und Reduktionen* (0 Punkte)

a) Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 = \{w_m \in \{0,1\}^* \mid \text{TM } M \text{ hält für Eingabe } 01\}$$

wobei w_M das Encoding für M ist.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- L_1 ist entscheidbar.
- L_1 ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- L_1 ist weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

Um zu zeigen, dass L_1 entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, beschreiben Sie kurz die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die L_1 (semi-) entscheidet. Um zu zeigen, dass L_1 nicht (semi-)entscheidbar ist, reduzieren Sie ein geeignetes Problem auf L_1.

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten wie folgt: Wenn eine Sprache L (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die die charakteristische Funktion χ_L bzw. χ'_L berechnet. Wenn L nicht (semi-)entscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch ab.

   i) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.
   ii) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.
   iii) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.
   iv) Das Problem, ob $L(M) = \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

c) Zeigen Sie, dass das folgende Problem für jede deterministische Turingmaschine M und natürliche Zahl n entscheidbar ist.

„M hält auf jeder Eingabe nach höchstens n Schritten.“

FSK10-3 *μ-Rekursion* (2 Punkte)

Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Exponentiation und absolute Differenz $\mathit{absdiff}(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ primitiv rekursiv sind. Beachten Sie, dass wir in der Definition von *absdiff* x_1 und x_2 als ganze Zahlen subtrahieren, d.h. $\mathit{absdiff}(3, 4) = \mathit{absdiff}(4, 3) = 1$.

a) Berechnen Sie μg für folgende Funktionen g.

   - $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 3x^2 + 5x + 3$
   - $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = (x/2 - 4)^2 - 2$, wobei wir $(x/2 - 4)^2$ ganzzahlig berechnen analog zu *absdiff*.
   - $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x_1, x_2) = (x_1 + 1) \cdot x_2$

b) Zeigen Sie, dass die Fakultätsfunktion

$$\mathit{fac}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \mathit{fac}(x_1) = x_1!$$

primitiv rekursiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die Quadratwurzelfunktion

$$sqrt\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad sqrt(x_1) = \sqrt{x_1}$$

μ-rekursiv ist. Beachten Sie, dass die Quadratwurzel für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$sqrt(x_1) = n \iff n^2 = x_1$$

FSK10-4 ***Primitiv rekursive Prädikate*** (0 Punkte)

Primitiv rekursive Funktionen, die auf $\{0, 1\}$ abbilden, können auch als Prädikate aufgefasst werden. Wir betrachten in dieser Aufgabe nur einstellige Prädikate p, wobei $p(x) = 0$ bedeutet, dass x die Eigenschaft p nicht besitzt, und $p(x) = 1$ bedeutet, dass x die Eigenschaft p besitzt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion *iszero* ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$iszero(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 > 0 \\ 1 & \text{für } x_1 = 0 \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion *even* ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$even(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } x_1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion *ifnotzero* primitiv rekursiv ist.

$$ifnotzero(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 > 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

d) Zeigen Sie, dass die Funktion *ifthenelse* primitiv rekursiv ist, angenommen, dass $p(x)$ ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$ifthenelse(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } p(x_1) \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Zeigen Sie, dass, gegeben zwei primitiv rekursive Prädikate p und q, auch die Konjunktion $p \wedge q$ primitiv rekursiv ist.