Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 12. Juni 2024, 10:00 Uhr

Übung 7 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

FSK7-1 ***Sprachen einordnen*** (2 Punkte)

Die formalen Sprachen L_i, $i \in \{0, \ldots, 3\}$, seien definiert als

$$\begin{aligned}
L_0 &:= \{ab^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c^i a \mid i \in \mathbb{N}\} && \subseteq \{a, b, c\}^* \\
L_1 &:= \{w\$ \mid \#_a(w) < \#_b(w) + \#_c(w)\} && \subseteq \{a, b, c, \$\}^* \\
L_2 &:= \{(ab)^j \$ c^i \mid i, j \in \mathbb{N}\} && \subseteq \{a, b, c, \$\}^* \\
L_3 &:= \{(ab)^i \$ c^j \$ (ab)^i \mid j < i \text{ und } i, j \in \mathbb{N}\} && \subseteq \{a, b, c, \$\}^*
\end{aligned}$$

Für die i-fache Wiederholung des Worts w schreiben wir manchmal $(w)^i$ statt nur w^i, um Anfang und Ende von w zu markieren. Die Klammern sind daher *nicht* Teil des Alphabets der jeweiligen Sprachen.

Bearbeiten Sie die folgenden Arbeitsaufträge für jede der Sprachen L_i.

a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i regulär ist.

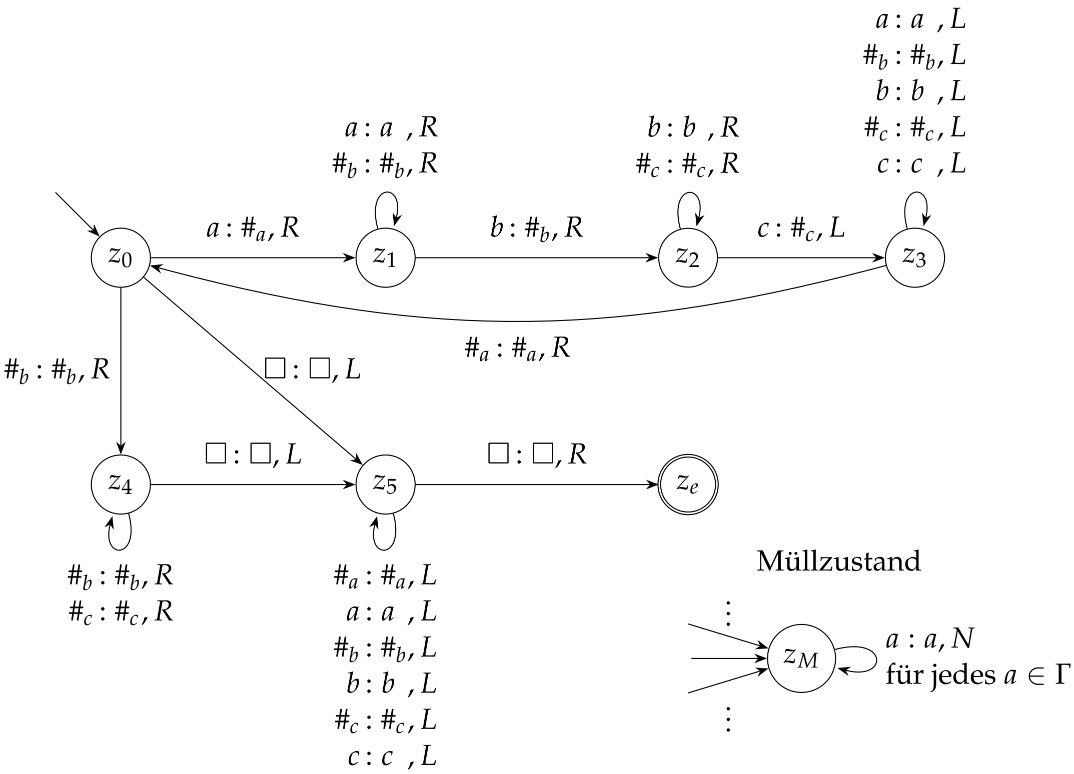
b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i deterministisch kontextfrei ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass L_i kontextfrei ist.

Hinweis: Nutzen Sie, dass manche Aussagen direkt aus anderen Aussagen folgen. Um zu beweisen, dass L_i regulär/deterministisch kontextfrei/kontextfrei ist, genügt es, ein geeignetes Konstrukt K_i (Grammatik, Automat oder regulärer Ausdruck) anzugeben und kurz zu begründen, warum $L(K_i) = L_i$ gilt.

FSK7-2 ***Turingmaschinen verstehen*** (0 Punkte)

Die folgende DTM M ist als Zustandsgraph gegeben, wobei $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\#_a, \#_b, \#_c, \square\}$ und $\square$ das Blank-Symbol ist.



a) Geben Sie Läufe der Turingmaschine (Übergänge von der Startkonfiguration bis zur Endkonfiguration) für die Wörter ε, $abcc$ und abc an.

b) Welche Sprache akzeptiert die Turingmaschine M? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Die obige Turingmaschine M mit Alphabet Σ und Bandalphabet Γ berechnet eine (partielle) Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, wenn für alle $u \in \Sigma^*$ und $v \in \Gamma^*$ gilt: $f(u) = v$ g.d.w. $z_0 u \vdash_M^* \square \cdots \square z_e v \square \cdots \square$ mit z_e Endzustand. (Beachten Sie: Diese Definition weicht leicht von der aus der Vorlesung ab, weil die Wertemenge von f nicht Σ^* ist, sondern Γ^*.)

   Welche Funktion berechnet M?

d) Bestimmen Sie asymptotisch, also in O-Notation, die Anzahl der Schritte (abhängig von n), die die Turingmaschine braucht, um das Wort $w = a^n b^n c^n$ zu erkennen.

FSK7-3 ***Turingmaschinen erstellen*** (2 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $L = \{w \mid \#_b(w) > \#_c(w)\}$ über dem Alphabet $\{b, c\}$.

a) Erstellen Sie auf `https://turingmachinesimulator.com/` eine TM, der L erkennt. Geben Sie sowohl einen Link zur Maschine an als auch den „Programmtext“ der Maschine.

b) Geben Sie für Ihre TM aus Teilaufgabe a) einen Zustandsgraphen an.

c) Geben Sie die Läufe der folgenden Wörter auf Ihre TM aus Teilaufgabe a) an: ε, c, bcc, $cbcbb$.

   Hinweis: Wörter, die nicht in L liegen, erzeugen eventuell unendliche Läufe. Geben Sie in solchen Fällen ein Präfix an, aus dem ersichtlich wird, dass der Lauf unendlich ist.

FSK7-4 ***Konstruktion Grammatik zu PDA*** (0 Punkte)

Sei $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik in Greibach-Normalform mit Produktionen

$$P = \{S \to aBCD,\ B \to bB \mid bC,\ C \to cCD \mid cD,\ D \to d\}$$

a) Erzeugen Sie gemäß der Konstruktion aus der Vorlesung aus G einen PDA M mit $L(M) = L(G)$, der mit leerem Keller akzeptiert.

b) Erzeugen Sie gemäß der sogenannten Tripelkonstruktion aus der Vorlesung aus M eine kontextfreie Grammatik H mit $L(H) = L(M)$.

c) Vergleichen Sie die Grammatiken G und H. Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten dieser Grammatiken, sowie ihre Unterschiede.