Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Luca Maio
Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 5. Juni 2024, 10:00 Uhr

Übung 6 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Wenn Sie Automaten angeben, tun Sie dies immer in Form eines Zustandsgraphen. Andere Formen der Darstellung (z.B. als Liste von Übergängen) werden nicht gewertet, da sie sehr viel aufwändiger zu korrigieren sind. Vergessen Sie nicht, im Zustandsgraph Start- und Endzustände zu markieren.

FSK6-1 ***Kontextfreie Grammatiken und Kellerautomaten*** (2 Punkte)

Sei $L = \{a^{2n}\$a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, \$\}$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erkennt.

b) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der L akzeptiert (mit leerem Keller oder mit Endzuständen). Erklären Sie kurz, warum Ihr Automat genau L akzeptiert.

FSK6-2 ***CYK-Algorithmus*** (2 Punkte)

Sei G die Grammatik $(\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}, \{\$, \#\}, P, A_1)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{A_1 &\to A_3A_4 \mid A_3A_2, \\ A_2 &\to A_2A_3 \mid A_4A_4, \\ A_3 &\to \$, \\ A_4 &\to \# \mid A_3A_4, \\ A_5 &\to A_4A_4 \mid \#\} \end{aligned}$$

a) Prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob die folgenden Wörter w_1 und w_2 in $L(G)$ sind. Erstellen Sie dazu für jedes Wort die entsprechende Tabelle des Algorithmus und erklären Sie anhand der Tabelle, ob das Wort in $L(G)$ ist.

   i) $w_1 = \$\#\$\#\#$

   ii) $w_2 = \$\$\$\#\#$

b) Geben Sie alle weiteren Wörter w an, für die sich aus den Tabellen ergibt, dass $w \in L(G)$ ist.

FSK6-3 ***Begrenzter Keller*** (0 Punkte)

a) Ein Kellerautomat mit k-begrenztem Keller ist ein Kellerautomat, bei dem maximal k Symbole auf dem Keller liegen können. Wenn der Keller voll ist, können Übergänge, die ein Symbol auf den Keller legen würden, nicht gewählt werden.

   Zeigen Sie, dass für jeden Kellerautomaten K und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$L(K \text{ mit } k\text{-begrenztem Keller}) \subseteq L(K)$$

   Hierbei nehmen wir an, dass K mit leerem Keller akzeptiert.

b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ die Kellerautomaten mit k-begrenztem Keller genau die regulären Sprachen beschreiben.

FSK6-4 ***Homomorphismen*** (0 Punkte)

Gegeben Alphabete Σ und Δ bezeichnen wir eine Abbildung $h\colon \Sigma^* \to \Delta^*$ als *(Monoid-) Homomorphismus*, wenn sie strukturerhaltend ist, d.h. wenn gilt:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u \circ v) &= h(u) \circ h(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $h(L) = \{h(u) \mid u \in L\}$.

Man kann leicht zeigen, dass für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen h gilt:

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \emptyset \\ h(L_1 \cup L_2) &= h(L_1) \cup h(L_2) \\ h(L_1 \cap L_2) &= h(L_1) \cap h(L_2) \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen h:

$$\begin{aligned} h(L_1 \circ L_2) &= h(L_1) \circ h(L_2) \\ h(L_1^*) &= (h(L_1))^* \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie für alle regulären Sprachen L und Homomorphismen h: Wenn L regulär ist, dann ist auch $h(L)$ regulär.

c) Zeigen Sie, dass über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ die Sprache

$$L = \{a^n b^i c^n d^j \mid n, i, j \in \mathbb{N}\}$$

   nicht regulär ist. Geben Sie zu diesem Zweck einen Homomorphismus h an, sodass $h(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Da $h(L)$ bekanntlich nicht regulär ist, kann dann auch L nicht regulär sein.