Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 24. April 2024, 10:00 Uhr

Übung 1 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

FSK1-1 *Operationen auf formalen Sprachen* (2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

a) Seien L_1 und L_2 formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, sodass alle Wörter in L_1 eine gerade Anzahl von a's haben und alle Wörter in L_2 eine gerade Anzahl von b's haben. Dann haben alle Wörter in $L_1 \cap L_2$ eine gerade Anzahl von a's und eine gerade Anzahl von b's.

b) Sei die formale Sprache L definiert als $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}$. Dann gilt $L \cup \{b\}^* = L$.

c) Sei Σ ein Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Sei L die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq k\}$. Dann ist L eine endliche Sprache.

d) Über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ definieren wir die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}$, also die Sprache der Wörter, die so viele a's und b's wie c's enthalten. Es gilt: $L^* \subseteq L$.

FSK1-2 *Grammatiken angeben* (2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Teilaufgaben eine Grammatik G_i als 4-Tupel an, sodass $L(G_i)$ die Sprache L_i über Σ erzeugt. Verwenden Sie keine ε-Produktionen. Erläutern Sie, warum $L(G_i) = L_i$ gilt, indem Sie die „Aufgabe" der einzelnen Variablen und Produktionen erläutern. Geben Sie außerdem jeweils den Typ Ihrer Grammatik an (mit Begründung).

a) $L_1 = \{a, b\}^+$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^+ \mid |w| \leq 2\}$

c) $L_3 = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j > 0\}$.

FSK1-3 ***Klammersprache*** (0 Punkte)

Die Grammatik G sei definiert durch $G = (\{S, A, B\}, \{(,), [,]\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \to (S), S \to [S], S \to A, S \to B, A \to (), A \to [], B \to S, B \to BB\}$$

a) Von welchem Typ ist die Grammatik G?

b) Stellen Sie für folgende Zeichenketten fest, ob sie Wörter in $L(G)$ sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Bei Wörtern, die in $L(G)$ sind, geben Sie eine Linksableitung, eine Rechtsableitung und einen Syntaxbaum an.

   i) $()[[()]]$

   ii) $[[BA]]$

   iii) $(][[]])$

   iv) $(([[]]]))$

c) Geben Sie vier verschiedene Wörter aus $L(G)$ an, die nicht in Teilaufgabe b) vorkommen.

d) Geben Sie 4 verschiedene Wörter aus $\{[,], (,)\}^*$ an, die nicht in $L(G)$ liegen und die nicht in Teilaufgabe b) vorkommen.

e) Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ in natürlicher Sprache möglichst kurz und genau.

FSK1-4 ***Spracheigenschaft per Induktion beweisen*** (0 Punkte)

Die Grammatik G sei definiert durch $G = (\{A\}, \{a, b\}, \{A \to AA, A \to aAbb, A \to bab\}, A)$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$w \in L(G) \Longrightarrow \#_b(w) = 2 \cdot \#_a(w)$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die allgemeinere Aussage, dass für jede Satzform u gilt: Wenn u von G in n Schritten erzeugt wird (d.h. $A \Rightarrow^n u$), dann ist $\#_b(u) = 2 \cdot \#_a(u)$. Verwenden Sie vollständige Induktion über n.