Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Keine Abgabe

Übung 0 zur Vorlesung

Formale Sprachen und Komplexität

Hinweis: Dieses Blatt wird nicht abgegeben und Sie können keine Bonuspunkte erwerben, aber es wird in den Übungen 18. April 2024–23. April 2024 besprochen.

FSK0-1 *Fundamentale Beweisstrategien*

In dieser Aufgabe diskutieren wir fundamentale Beweisstrategien. Diese Strategien sollten aus anderen Kursen bekannt sein, aber da FSK sehr beweislastig ist, wiederholen wir sie hier.

a) Die folgende Tabelle fasst zusammen, wie man mit Aussagen, die bestimmte logische Operationen enthalten, umgeht.

	Um eine Aussage dieser Form zu beweisen…	Wenn eine Aussage dieser Form angenommen wird…
$P \wedge Q$	beweise sowohl P als auch Q	nimm P und Q an
$P \vee Q$	beweise entweder P oder Q	beweise die gewünschte Aussage sowohl unter der Annahme P als auch unter der Annahme Q (Fallunterscheidung)
$P \Longrightarrow Q$	beweise, dass unter der Annahme P Q folgt	beweise P und nimm dann Q an
$\neg P$	beweise, dass unter der Annahme P ein Widerspruch folgt	beweise P, um einen Widerspruch herzuleiten
$\forall x,\ P(x)$	beweise, dass $P(a)$ für ein beliebiges a gilt	nimm $P(a)$ für jedes konkrete a an
$\exists x,\ P(x)$	gib ein konkretes a an und beweise $P(a)$	nimm ein beliebiges a an, für das $P(a)$ gilt

Die Biimplikation $P \Longleftrightarrow Q$ („P genau dann wenn Q“ oder „P g.d.w. Q“) ist definiert als $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$.

Außerdem kann man, unabhängig von der zu beweisenden Aussage, immer folgende Regeln anwenden:

- Widerspruchsbeweis: um P zu beweisen nimm an, dass $\neg P$ gilt, und leite daraus einen Widerspruch ab.

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten: für jede beliebige Aussage P nimm $P \vee \neg P$ an.

Häufig nützlich sind auch folgende Regeln:

$$\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &\iff \neg A \vee \neg B \\
\neg(A \vee B) &\iff \neg A \wedge \neg B \\
\neg \forall x,\, P(x) &\iff \exists x,\, \neg P(x) \\
\neg \exists x,\, P(x) &\iff \forall x,\, \neg P(x) \\
A \wedge (B \vee C) &\iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
A \vee (B \wedge C) &\iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
(\forall x,\, P(x)) \wedge (\forall x,\, Q(x)) &\iff \forall x,\, P(x) \wedge Q(x) \\
(\exists x,\, P(x)) \vee (\exists x,\, Q(x)) &\iff \exists x,\, P(x) \vee Q(x) \\
\neg\neg A &\iff A
\end{aligned}$$

i) Zeigen Sie: $(\forall n,\, \exists k,\, k > n) \iff (\neg \exists n,\, \forall k,\, n \geq k)$

ii) Gilt die Aussage $\forall n,\, \exists k,\, k > n$
   - für $n, k \in \mathbb{N}$?
   - für $n, k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei $\infty > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

   Beweisen Sie Ihre Antworten.

iii) Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

b) Die Gleichheit von Mengen ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
S \subseteq T &\text{ g.d.w. } \forall x,\, x \in S \implies x \in T \\
S = T &\text{ g.d.w. } S \subseteq T \wedge T \subseteq S
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

i) Für alle Mengen S und T gilt: $S = T$ g.d.w. $\forall x,\, x \in S \iff x \in T$.

ii) Für alle Sprachen A, B, C über einem Alphabet Σ gilt: $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$.

iii) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim und } n \geq 3\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist prim und ungerade}\}$.

c) Die Konkatenation $v \cdot w$ (alternativ vw) zweiter Wörter über einem Alphabet Σ ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
\varepsilon \cdot w &= w \\
av \cdot w &= a(v \cdot w)
\end{aligned}$$

Alternativ kann man diese Definition auch so schreiben:

$$v \cdot w = \begin{cases} w & \text{falls } v = \varepsilon \\ a(v' \cdot w) & \text{falls } v = av' \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle Wörter u, v, w gilt: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$. Verwenden Sie vollständige Induktion (siehe Skript, Kapitel 2) über die Länge von u.

FSK0-2 ***Wörter, Sprachen***

a) Seien $\Sigma = \{a, b\}$, $U = \{aab, baa\}$ und $V = \{aa, bb\}$.

Geben Sie Wörter $u, v, w, x \in \Sigma^*$ an, sodass

- $u \in U^*$ und $u \notin V^*$;
- $v \notin U^*$ und $v \in V^*$;
- $w \in U^*$ und $w \in V^*$;
- $x \notin U^*$ und $x \notin V^*$.

Hinweis: Für eine Menge von Symbolen S bezeichnen wir mit S^* die Menge aller endlichen Folgen von Symbolen aus S (z.B. $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$).

b) Sei $w = abababab bbbccbaaaaaaabacaabbbbbbaba$.

Geben Sie alle Teilwörter v von w an, auf die **alle** der folgenden Eigenschaften zutreffen:

- $|v| = 4$, die Länge von v ist 4;
- $v[1] = a$, das erste Symbol in v ist a;
- $\#_b(v) > 0$, die Anzahl von Vorkommnissen von b in v ist größer als 0.

FSK0-3 ***Äquivalenzrelationen***

Eine Relation zwischen zwei Mengen M, N ist eine Menge $R \subseteq M \times N$ von Paaren bestehend je aus einem Element aus M und einem aus N. M und N können hierbei beliebige Mengen sein. Ist $(p, q) \in R$, so schreibt man auch $R(p, q)$, pRq oder $p \sim_R q$.

Ist klar, um welche Relation es sich handelt, kann man auch $p \sim q$ schreiben.

Eine Relation R heißt Äquivalenzrelation, wenn

- die zugrundeliegenden Mengen gleich sind: $M = N$;
- für alle $x \in M$ gilt xRx (d.h. R ist reflexiv);
- für alle $x, y \in M$ gilt $xRy \Longrightarrow yRx$ (d.h. R ist symmetrisch);
- für alle $x, y, z \in M$ gilt $xRy \land yRz \Longrightarrow xRz$ (d.h. R ist transitiv).

Eine Äquivalenzklasse K einer Äquivalenzrelation R ist eine maximale Menge von Elementen $u, v, w, \ldots \in M$ sodass alle Elemente von K durch R in Beziehung stehen: uRv, uRw, vRu, vRw, etc. „Maximal" bedeutet, dass es kein Element $x \in M$ gibt, das nicht in K ist, aber mit allen Elementen von K in Beziehung steht. Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beispiel: Die Relation

$$\{(u,v) \mid u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \text{ geteilt durch 3 hat denselben Rest} \\ \text{wie } v \text{ geteilt durch } 3\}$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind $\{0,3,6,\ldots\}$, $\{1,4,7,\ldots\}$ und $\{2,5,8,\ldots\}$. Sie hat somit Index 3.

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Berechnen Sie außerdem den Index von mindestens zwei der Äquivalenzrelationen.

a) $R_1 \subseteq \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ mit $0R_11$, $2R_13$ (und sonst $\neg xR_1y$).

b) $R_2 \subseteq \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ mit $0R_20$, $1R_21$, $2R_22$ (und sonst $\neg xR_2y$).

c) $R_3 \subseteq \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ mit $0R_30$, $1R_31$, $2R_32$, $1R_32$, $2R_31$ (und sonst $\neg xR_3y$).

d) $R_4 = \{(p,q) \mid$ die Personen p, q haben das gleiche Geburtsjahr$\}$.

e) $R_5 = \{(u,v) \mid$ die Wörter u und v über dem Alphabet $\{a,b\}$ stimmen in den ersten k Positionen überein, wobei k die Länge des kürzeren Wortes ist$\}$.

f) $R_6 = \{(p,q) \mid p, q \in \mathbb{N},\ p+q \text{ ist gerade}\}$.