Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Lydia Kondylidou

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 24. Mai 2023, 10:00 Uhr

Lösungsvorschlag zur Übung 5 zur Vorlesung

Theoretische Informatik für Medieninformatiker

TIMI5-1 ***Pumping-Lemma*** (2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen über $\{a, b, c\}$ an, ob diese regulär oder nicht regulär sind, und beweisen Sie, dass Ihre Antwort stimmt.

Um zu beweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwenden Sie das Pumping-Lemma. Um zu beweisen, dass eine Sprache regulär ist, genügt es, ein Konstrukt K anzugeben, das die Sprache erzeugt/erkennt. Sie müssen nicht beweisen, dass $L(K) = L$ ist.

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Ist regulär, da $L = L(a^* b^* c^*)$.

b) $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Ist regulär, da $L = L(a^* b^* \mid b^* c^*)$.

c) $M = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei $n \geq 1$ die beliebige Pumpingzahl.

Wir wählen das Wort $z = a^n b a^n b$ mit $|z| \geq n$. Für alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gilt $u = a^k$, $v = a^l$, $w = a^m b a^n b$, $k + l + m = n$, $k + l \leq n$, $l > 0$.

Nun ist aber $uv^2w = a^k a^{2l} a^m b a^n b$ nicht mehr in M, da $k + 2l + m = n + l \neq n$ für $l > 0$.

Damit ist die Pumpingeigenschaft für M widerlegt und das Pumping-Lemma zeigt, dass M nicht regulär ist.

d) $N = \{a^{3k+2} \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Ist regulär, da $N = L(aaaaaaaa(aaa)^*)$.

e) $Q = \{a^{(k+2)!} \mid k \in \mathbb{N}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei $n \geq 1$ die beliebige Pumpingzahl.

Wir wählen das Wort $w = a^{(n+2)!}$ mit $|w| \geq n$. Betrachte nun jede beliebige Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$. Dann gilt $u = a^k, v = a^l, w = a^m$ mit $k + l + m = (n+2)!, k + l \leq n, l > 0$.

Dann ist $uv^iw = a^{k+il+m} = a^{(n+2)!+(i-1)l}$. Für $i = 2$ ergibt sich $uv^2w = a^{k+2l+m} = a^{(n+2)!+l}$. Da $l \leq n$, haben wir $(n+2)! < (n+2)! + l < ((n+1)+2)!$. Daher ist $a^{(n+2)!+l}$ nicht von der Form $a^{(k+2)!}$, d.h. $a^{(n+2)!+l} \notin Q$.

Damit ist die Pumpingeigenschaft für Q widerlegt und das Pumping-Lemma zeigt, dass Q nicht regulär ist.

f) $R = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei $n \geq 1$ die beliebige Pumpingzahl.

Wir wählen das Wort $w = a^n b^n$ mit $|w| \geq n$. Betrachte nun jede beliebige Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$. Dann gilt $u = a^k, v = a^l, w = a^m b^n$ mit $k + l + m = n, k + l \leq n, l > 0$.

Dann ist $uv^iw = a^{k+il+m}b^n = a^{n+(i-1)l}b^n$. Für $i = 2$ ergibt sich $uv^2w = a^{n+l}b^n$. Da $l > 0$, haben wir $a^{n+l}b^n \notin R$.

Damit ist die Pumpingeigenschaft für R widerlegt und das Pumping-Lemma zeigt, dass R nicht regulär ist.

TIMI5-2 *Konservative Erweiterungen regulärer Ausdrücke* (0 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Erweiterungen regulärer Ausdrücke mit zusätzlichen Operatoren. Geben Sie für jede Erweiterung an, ob sie konservativ ist, und beweisen Sie Ihre Antwort. Eine Erweiterung ist konservativ, wenn die erweiterten regulären Ausdrücke nur reguläre Sprachen beschreiben.

Im Folgenden seien $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ reguläre Ausdrücke.

a) $\alpha?$: Teilwörter, die von α erkannt werden, dürfen vorkommen, müssen aber nicht. Die Semantik von $\alpha?$ ist also $L(\alpha?) = \{\varepsilon\} \cup L(\alpha)$.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Die Erweiterung ist konservativ. Es ist $L(\alpha?) = L(\alpha \mid \varepsilon)$, das heißt jeder Teilausdruck $\alpha?$ kann durch den regulären Ausdruck $\alpha \mid \varepsilon$ ersetzt werden, ohne die Bedeutung des gesamten Ausdrucks zu ändern.

b) α^+: wie α^*, aber α muss mindestens einmal vorkommen.

$$L(\alpha^+) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} L(\alpha)^i = L(\alpha) \cup L(\alpha)^2 \cup L(\alpha)^3 \cup \cdots$$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Konservativ, denn $L(\alpha^+) = L(\alpha\alpha^*)$.

c) $\alpha^{\{i,j\}}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und $i \leq j$: wie α^*, aber α muss mindestens i-mal und darf höchstens j-mal wiederholt werden.

$$L(\alpha^{\{i,j\}}) = \bigcup_{k=i}^{j} L(\alpha)^k = L(\alpha)^i \cup L(\alpha)^{i+1} \cup L(\alpha)^{i+2} \cup \cdots \cup L(\alpha)^j$$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Konservativ, denn $L(\alpha^{\{i,j\}}) = L(\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{i\text{-mal}}\underbrace{\alpha?\alpha?\ldots\alpha?}_{(j-i)\text{-mal}})$

d) $s(\alpha)$ („Shuffle-Operator“): die Buchstaben von α dürfen in beliebiger Reihenfolge auftauchen.

$L(s(\alpha)) = \{w \mid \exists v \in L(\alpha).\ \forall a \in \Sigma.\ \#_a(v) = \#_a(w)\}$

Beispiel: $L(s(aab)) = \{aab, aba, baa\}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG: Nicht konservativ, das heißt Ausdrücke mit s können auch nicht-reguläre Sprachen erkennen.

Beispielsweise ist $s((ab)^*)$ nicht regulär. Es handelt sich hierbei um die Sprache von Wörtern über $\{a, b\}$, die gleich viele as und bs enthalten. Die Nicht-Regularität kann mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden oder mit dem Satz von Myhill und Nerode.

Alternativ ist auch $L(s((ab)^*)) \cap L(a^*b^*) = \{a^ib^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, was eines der Standardbeispiele für nicht reguläre Sprachen ist.