

Lösungsvorschlag zur Übung 3 zur Vorlesung  
Theoretische Informatik für Medieninformatiker

TIMI3-1 Konstruktion von NFAs

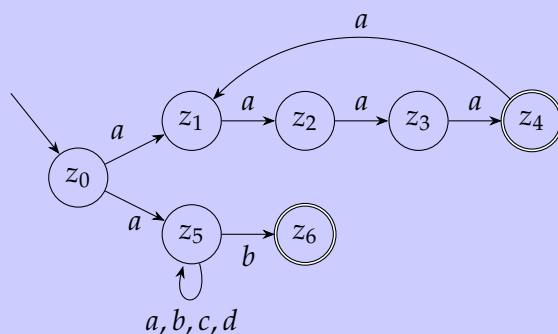
(0 Punkte)

- a) Geben Sie den Zustandsgraph eines NFA  $A$  mit Eingabealphabet  $\{a, b, c, d\}$  an, der genau alle Wörter  $w$  akzeptiert, für die gilt:
- $w$  ist von der Form  $a^{4i}$  für ein  $i \in \mathbb{N}_{>0}$  **oder**
  - $w$  fängt mit  $a$  an und endet mit einem  $b$ .

D.h. die von  $A$  akzeptierte Sprache kann geschrieben werden als

$$L(A) = \{w \in \{a\}^* \mid \#_a(w) = 4i, i \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{awb \mid w \in \{a, b, c, d\}^*\}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:



- b) Sei  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$  und

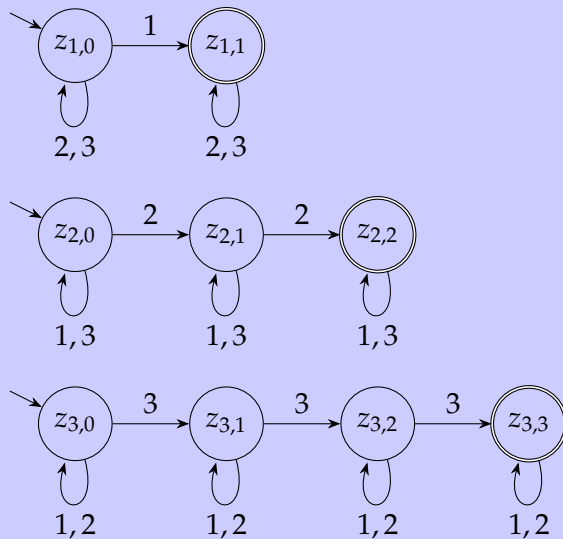
$$L = \{w \mid i \in \Sigma, w \in \Sigma^* \text{ und } \#_i(w) = i\}.$$

Das heißt die Sprache  $L$  enthält genau die Wörter  $w$ , für die gilt: Es gibt eine Zahl  $i \in \{1, 2, 3\}$  sodass das Wort  $w$  das Symbol  $i$  genau  $i$ -mal enthält.

Z.B. gilt  $212323 \in L$ , da das Wort  $212323$  genau 1-mal das Symbol 1 enthält. Ebenso gilt  $2311233 \in L$ , da das Wort  $2311233$  genau 2-mal das Symbol 2 enthält. Hingegen ist  $112223 \notin L$ .

Geben Sie den Zustandsgraph eines NFA  $B$  an mit  $L(B) = L$ .

### LÖSUNGSVORSCHLAG:



- c) Sei  $M$  ein beliebiger NFA über einem beliebigen Alphabet  $\Sigma$  und sei  $a \notin \Sigma$ . Konstruieren Sie allgemein daraus einen NFA  $N$  über  $\Sigma \cup \{a\}$  mit

$$L(N) = \{wa \mid w \in L(M)\}$$

Anders gesagt: Der Automat  $N$  soll ein Wort genau dann akzeptieren, wenn das Wort von der Form  $wa$  ist und  $w$  vom Automaten  $M$  akzeptiert wird.

### LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei  $M = (\{z_0, \dots, z_n\}, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA und  $a \notin \Sigma$ .

Wir definieren  $N = (\{z_0, \dots, z_n, z_E\}, \Sigma \cup \{a\}, \delta', S, \{z_E\})$  (für  $z_E$  neu) mit

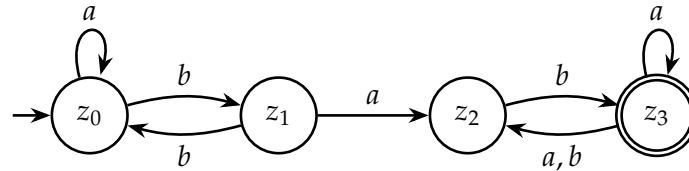
$$\begin{aligned} \delta'(z_i, x) &= \delta(z_i, x) && \text{für } 0 \leq i \leq n \text{ und alle } x \in \Sigma \\ \delta'(z_i, a) &= \{z_E\} && \text{für alle } z_i \in E \\ \delta'(z_i, a) &= \emptyset && \text{für alle } z_i \notin E \\ \delta'(z_E, x) &= \emptyset && \text{für alle } x \in \Sigma \cup \{a\} \end{aligned}$$

Der Automat  $N$  „startet“ also genau wie  $M$ . Beim Lesen eines  $a$  muss er jedoch in den Endzustand  $z_E$  wechseln (mit einem Übergang  $z_i \xrightarrow{a} z_E$ ), falls sich  $N$  in einem der Endzustände von  $M$  befindet. Falls nicht, steht das Zeichen  $a$  an der falschen Position und das Wort wird nicht erkannt. Befindet sich  $N$  im Endzustand und liest weitere Zeichen  $x$ , so akzeptiert er auch nicht.

**TIMI3-2 Läufe und Potenzmengenkonstruktion**

(2 Punkte)

Für diese Aufgabe betrachten wir folgenden NFA  $C$  über dem Alphabet  $\{a, b\}$ :



- a) Geben Sie einen akzeptierenden Lauf des NFA  $C$  auf dem Wort  $w = aaabbbabab$  an.

**LÖSUNGSVORSCHLAG:**

$$z_0 \xrightarrow{a} z_0 \xrightarrow{a} z_0 \xrightarrow{a} z_0 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{b} z_3$$

ist ein solcher Lauf.

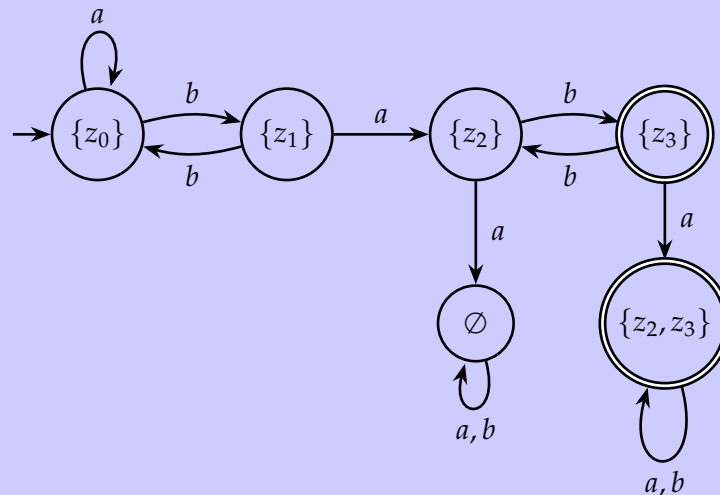
- b) Berechnen Sie zum NFA  $C$  einen äquivalenten DFA  $D$  mit der Potenzmengenkonstruktion. Geben Sie nur den Zustandsgraphen des vom Startzustand erreichbaren Teils des Automaten an. Vergessen Sie nicht, den Startzustand und die Endzustände zu markieren.

**LÖSUNGSVORSCHLAG:**

Potenzmengenkonstruktion, wobei nur die erreichbaren Zustände betrachtet werden:

Zustand / Nachfolge bei	$a$	$b$
$\{z_0\}$	$\{z_0\}$	$\{z_1\}$
$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0\}$
$\{z_2\}$	$\emptyset$	$\{z_3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_2\}$
$\{z_2, z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$

Startzustand  $\{z_0\}$  und Endzustände  $\{z_3\}, \{z_2, z_3\}$ .



c) Geben Sie den Lauf des DFA  $D$  auf dem Wort  $w$  an. Ist der Lauf akzeptierend?

**LÖSUNGSVORSCHLAG:**

$\{z_0\} \xrightarrow{a} \{z_0\} \xrightarrow{a} \{z_0\} \xrightarrow{a} \{z_0\} \xrightarrow{b} \{z_1\} \xrightarrow{b} \{z_0\} \xrightarrow{b} \{z_1\} \xrightarrow{a} \{z_2\} \xrightarrow{b} \{z_3\} \xrightarrow{a} \{z_2, z_3\} \xrightarrow{b} \{z_2, z_3\}$

Der Lauf ist akzeptierend, da  $\{z_2, z_3\}$  ein Endzustand ist.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem von Ihnen in der Teilaufgabe a) gefundenen Lauf des Automaten  $C$  und dem in dieser Teilaufgabe gefundenen Lauf des Automaten  $D$  auf dem Wort  $w$ ?

**LÖSUNGSVORSCHLAG:**

Jeder Zustand im Lauf des NFA  $C$  ist Element des entsprechenden Zustands im Lauf des DFA  $D$ . (Zur Erinnerung: Die Zustände des DFA sind Mengen von Zuständen des NFA.)

Da jeder Zustand von  $D$  auflistet, in welchem Zustand  $C$  an den entsprechenden Wortpositionen sein kann, simuliert  $D$  in gewisser Weise alle möglichen Läufe des Automaten  $C$  auf dem Wort.