Institut für Informatik der Ludwig-Maximilians-Universität München
Prof. Dr. David Sabel
Stephan Barth
Sarah Vaupel

SoSe 2022
17.08.2022

Klausur zur Vorlesung

Theoretische Informatik für Medieninformatiker

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Hilfsmittel sind nicht erlaubt, auch der Besitz ausgeschalteter elektronischer Geräte wird als Betrug gewertet. Schreiben Sie Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf dieses Deckblatt, sowie Ihren Namen in die Kopfzeile auf **jedem Blatt** der Klausurangabe! Geben Sie alle Blätter ab, lassen Sie diese zusammengeheftet! Verwenden Sie nur **dokumentenechte Stifte** und **weder** die Farben **rot noch grün**.

Kontrollieren Sie, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben. Aufgabenstellungen befinden sich auf den **Seiten 1–12**. Sie dürfen die Rückseiten für Nebenrechnungen nutzen. Falls Sie die Rückseiten für Antworten nutzen, so markieren Sie klar, was zu welcher Aufgabe gehört und schreiben Sie in der entsprechenden Aufgabe, wo alle Teile Ihrer Antwort zu finden sind. Streichen Sie alles durch, was nicht korrigiert werden soll!

Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig durch, bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen. Es gibt 4 unterschiedlich gewichtete Aufgaben zu insgesamt 90 Punkten. Mit 45 Punkten haben Sie sicherlich bestanden. Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur in ausreichend guter gesundheitlicher Verfassung sind, und diese Klausurprüfung verbindlich annehmen.

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Die Klausur soll gewertet werden: ☐ JA ☐ NEIN

Hinweis: Ist keines der beiden Felder angekreuzt, so wird **JA** angenommen.

Hiermit erkläre ich die Richtigkeit der obigen Angaben: ______________________

(Unterschrift)

Die folgende Tabelle **NICHT** ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	Bonus	Note
Punkte	34	28	16	12	**90**		
erreicht							

Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen): **(34 Punkte)**

a) Die Sprache $L_1 \subseteq \{a,b\}^*$ sei definiert als:

$$L_1 \quad := \quad \{uabbav \mid u,v \in \{a,b\}^*\}$$

L_1 enthält daher genau alle Wörter, die *abba* als Teilwort haben.

Geben Sie den Zustandsgraphen eines nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) A_1 an, für den gilt: $L(A_1) = L_1$.

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

b) Die Sprache $L_2 \subseteq \{a,b\}^*$ sei definiert als:

$$L_2 \quad := \quad \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \forall u, v \in \{a,b\}^* : w \neq ubaabv\}$$

L_2 enthält daher genau alle Wörter, die *baab* **nicht** als Teilwort besitzen.

Geben Sie den Zustandsgraphen eines deterministischen endlichen Automaten (DFA) A_2 an, für den gilt: $L(A_2) = L_2$.

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

c) Die Sprache $L_3 \subseteq \{a, b\}^*$ sei definiert als:

$$\begin{array}{lcl} L_3 & := & L_4 \cup L_5 \\ L_4 & := & \{w \mid \#_a(w) \geq 2\} \\ L_5 & := & \{w \mid \#_b(w) \leq 3\} \end{array}$$

Die Sprache L_3 enthält daher alle Wörter, die mindestens zwei a's oder höchstens drei b's enthalten.

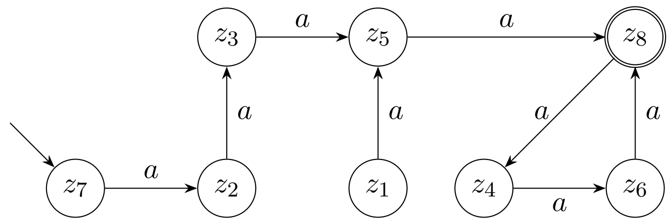
Geben Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L_3$ an.

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

d) Berechnen Sie für den folgenden deterministischen endlichen Automaten A_3 (der Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$ verarbeitet) den **Minimalautomaten**, d. h. einen deterministischen endlichen Automaten, der die gleiche Sprache akzeptiert und eine minimale Anzahl an Zuständen benutzt.

Erläutern Sie Ihre Berechnung, indem Sie die Minimierungstabelle angeben, und geben Sie den Minimalautomaten als Zustandsgraph an.



Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

Aufgabe 2 (Kontextfreiheit): **(28 Punkte)**

a) Die Sprache L_6 sei definiert als

$$L_6 := \{w \mid w = a^m w', w' \in \{a,b\}^*, m = \#_a(w'), m \geq 0\}$$

Informell: Alle Worte aus L_6 lassen sich in zwei Teilworte $w_1 w_2$ aufteilen, so dass w_1 nur aus a's besteht und w_2 genauso viele a's wie w_1 enthält.

(i) Geben Sie eine **kontextfreie Grammatik** G an, die L_6 erzeugt (d.h. $L(G) = L_6$) und erläutern Sie, warum G die Sprache L_6 erzeugt: Beschreiben Sie beispielsweise, welche „Aufgabe" die einzelnen Nichtterminale bei der Erzeugung übernehmen.

Geben Sie zusätzlich eine **Linksableitung** für das Wort $aabbbbaa$ für Ihre Grammatik an.

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 2:

(ii) Zeigen Sie mit dem Pumpinglemma für reguläre Sprachen, dass

$$L_6 = \{w \mid w = a^m w', w' \in \{a,b\}^*, m = \#_a(w'), m \geq 0\}$$

nicht regulär ist.

Zur Erinnerung:

Pumpinglemma für reguläre Sprachen.
Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:
i) $|uv| \leq n$,
ii) $|v| \geq 1$ und
iii) für alle $i \geq 0$: $uv^i w \in L$.

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 2:

b) Für eine kontextfreie Grammatik G mit Startsymbol S und Variablen $\{S, T, A, B, C, D, E, F\}$ wurde der CYK-Algorithmus für das Wort *abaaca* ausgeführt. Der Algorithmus hat dabei die folgende Tabelle für die $V(i, j)$-Mengen berechnet:

Wort	a	b	a	a	c	a
$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	T, A	B, D, F	T, A	T, A	C	T, A
2	S, B, C, D, E, F			S, B, C		
3	T		S, B, C	T		
4			T			
5	S, T					
6	T					

(i) Geben Sie anhand obiger Tabelle fünf verschiedene Wörter an, die **nicht** in $L(G)$ liegen und begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Geben Sie anhand obiger Tabelle drei verschiedene Wörter an, die in $L(G)$ liegen und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Berechenbarkeit und PCP): (16 Punkte)

Wir erinnern zunächst an die Definition des 01-Postschen Korrespondenzproblems:

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und sei K eine Folge von Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Das 01-Postsche Korrespondenzproblem (01-PCP) ist die Frage, ob es für die gegebene Folge K eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_m$ mit $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ gilt.

In der Vorlesung wurde die Unentscheidbarkeit des 01-PCP gezeigt.

Für ein Wort $a_1 \cdots a_n$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ und $n \geq 0$ ist das Komplement $C(a_1 \cdots a_n)$ definiert als $C(a_1) \cdots C(a_n)$ wobei

$$C(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Das Komplement-Postsche Korrespondenzpoblem (CPCP) ist definiert als

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und sei K eine Folge von Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Das Komplement-Postsche Korrespondenzproblem (CPCP) ist die Frage, ob es für die gegebene Folge K eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_m$ mit $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt, sodass $C(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ gilt.

a) Es sei $K = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$ mit

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (00, 111) \\ (x_2, y_2) &= (00, 0) \\ (x_3, y_3) &= (11, 0) \\ (x_4, y_4) &= (1, 100) \end{aligned}$$

Alternativ in der Spielstein-Schreibweise

$$K = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 00 \\ 111 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 00 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} \right)$$

Zeigen Sie, dass $K \in$ CPCP gilt.

(Hinweis: Es gibt Lösungen, die nicht mehr als vier Indizes verwenden).

Fortsetzung von Aufgabe 3:

b) Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit von CPCP, indem Sie 01-PCP auf CPCP reduzieren.

Aufgabe 4 (Gemischte Fragen): (12 Punkte)

Pro Frage gibt es **genau eine richtige** Antwort.

Punkte in dieser Aufgabe werden nach folgender Tabelle vergeben. Eine Antwort, bei der 0 oder mindestens 2 Kästchen angekreuzt sind, zählt als falsch.

Richtige Antworten	0	1	2	3	4	5	6
Erzielte Punkte	0	1	3	6	8	10	12

Seien L_7 und L_8 formale Sprachen.

- ☐ Wenn beide Sprachen L_7 und L_8 jeweils regulär sind, dann ist $\overline{L_7} \cap L_7\overline{L_8}$ ebenfalls regulär.
- ☐ Wenn eine der beiden Sprachen L_7 oder L_8 nicht regulär ist, dann ist $L_7 \cup L_8$ ebenfalls nicht regulär.
- ☐ Wenn eine der beiden Sprachen L_7 oder L_8 regulär ist, dann ist $L_7 \cup L_8$ ebenfalls regulär.
- ☐ Wenn beide Sprachen L_7 und L_8 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_7 \cap L_8$ ebenfalls nicht regulär.

Das Präfixfreie Postsche Korrespondenzproblem (PPCP) ist eine Variante des PCP-Problems, welche nur solche Eingaben $((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ verwendet, sodass

$$\text{für alle } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ gilt: } x_i \text{ ist kein Präfix von } y_i \text{ und } y_i \text{ ist kein Präfix von } x_i.$$

Eingaben, die diese Bedingung verletzen, liegen nicht in PPCP. Andere Eingaben liegen in PPCP genau dann, wenn sie in PCP liegen. Es gilt:

- ☐ PPCP ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar
- ☐ PPCP ist entscheidbar, aber nicht semi-entscheidbar
- ☐ PPCP ist unentscheidbar und nicht semi-entscheidbar
- ☐ PPCP $\in \mathcal{P}$

Wenn $L_9 \in \mathcal{NP}$, dann

- ☐ wird L_9 durch eine deterministische Turingmaschine akzeptiert
- ☐ gilt $L_9 \notin \mathcal{P}$
- ☐ führt jede nichtdeterministische Turingmaschine M mit $L(M) = L_9$ mehr als polynomiell viele Schritte aus, d.h. für jedes Polynom $p(n)$ gilt $ntime_M(|w|) > p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$
- ☐ führt jede deterministische Turingmaschine M mit $L(M) = L_9$ höchstens polynomiell viele Schritte aus, d.h. es gibt ein Polynom $p(n)$, sodass $ntime_M(|w|) \leq p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 4:

Die Grammatik $G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & A \to a, \\ & A \to BC, \\ & B \to b, \\ & B \to C, \\ & BC \to CD, \\ & D \to b, \\ & D \to B\} \end{aligned}$$

ist

- ☐ in Chomsky-Normalform
- ☐ vom Typ 1, aber nicht vom Typ 2
- ☐ vom Typ 2, aber nicht vom Typ 3
- ☐ vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1

Die Sprache $L_{10} := \{w \mid \text{Turingmaschine } M_w \text{ entscheidet das Halteproblem}\}$ ist

- ☐ eine reguläre Sprache
- ☐ unentscheidbar, aber semi-entscheidbar
- ☐ unentscheidbar, aber das Komplement $\overline{L_{10}}$ ist semi-entscheidbar
- ☐ vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1

Typ 0-Sprachen

- ☐ sind **nicht** unter Schnitt **abgeschlossen**
- ☐ sind unter Komplement **abgeschlossen**
- ☐ sind unter Vereinigung **abgeschlossen**
- ☐ sind **nicht** rekursiv-aufzählbar