Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Lydia Kondylidou

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 5. Juli 2023, 10:00 Uhr

Übung 11 zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Medieninformatiker

TIMI11-1 ***Entscheidbarkeit und Reduktionen*** (2 Punkte)

a) Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 = \{z \in \{0,1\}^* \mid \text{TM } M_z \text{ hält für Eingabe } 01\}$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- L_1 ist entscheidbar.
- L_1 ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- L_1 ist weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

Um zu zeigen, dass L_1 (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie kurz die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die L_1 (semi-)entscheidet. Um zu zeigen, dass L_1 nicht (semi-)entscheidbar ist, reduzieren Sie ein geeignetes Problem auf L_1.

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten wie folgt: Wenn eine Sprache L (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die die charakteristische Funktion χ_L bzw. χ'_L berechnet. Wenn L nicht (semi-)entscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch ab.

i) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.
ii) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.
iii) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.
iv) Das Problem, ob $L(M) = \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

c) Zeigen Sie, dass das folgende Problem für jede Turingmaschine T und natürliche Zahl n entscheidbar ist.

„T hält auf jeder Eingabe nach höchstens n Schritten.“

TIMI11-2 ***Satz von Rice*** (0 Punkte)

Sei $T = (Z, \{a, b\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine. Welche der folgenden Fragestellungen zu T sind entscheidbar?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit unentscheidbarer Fragestellungen mittels des Satzes von Rice. Bei entscheidbaren Fragestellungen erläutern Sie, wie die charakteristische Funktion berechnet wird.

a) T hat mindestens $|\Gamma|!$ viele Zustände. (! bezeichnet die Fakultätsfunktion.)

b) Leerheitsproblem: Es gibt ein Wort $w \in L(T)$

c) Wenn $a \in L(T)$, dann auch $aa \in L(T)$

d) Wenn es ein Wort $w \in L(T)$ gibt, dann gibt es auch ein Wort u, welches ein b enthält mit $u \in L(T)$