FSK
Zentralübung 4

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 17. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Themen der Zentralübung

- Pumping-Lemma (Wiederholung)
- Nerode-Relation, Satz von Myhill und Nerode
- Minimierung von DFAs
- Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Pumping-Lemma

Pumping-Lemma: Sprache ist regulär $\implies$ Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

Wird aber meist benutzt um Regularität zu widerlegen:

Äquivalente Aussage:
Sprache erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft $\implies$ Sprache ist nicht regulär.

Erfüllt / erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft

Formale Sprache L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Formale Sprache L erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft:

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$,
sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit

- $|uv| \leq n$ und
- $|v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert mit $uv^iw \notin L$.

Satz

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

Satz

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Satz

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).

   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L$ und $|z| \geq n$).

3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Satz

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).

   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L$ und $|z| \geq n$).

3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).

   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

Satz

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").

   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).

   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L$ und $|z| \geq n$).

3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").

   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0 w = a^{n-k} b^n \notin L$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^i w \notin L$).

Satz

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).

   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L$ und $|z| \geq n$).

3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).

   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}b^n \notin L$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^iw \notin L$).

Daher erfüllt L nicht die Pumping-Eigenschaft und daher kann L nicht regulär sein.

Nerode-Relation einer Sprache

Definition der Nerode-Relation $\sim_L$

Sei L eine formale Sprache über Σ dann gilt für $u, v \in \Sigma^*$

$$u \sim_L v \text{ g.d.w. } \forall w : uw \in L \iff vw \in L$$

D.h. Wörter u, v sind äquivalent bezüglich $\sim_L$, wenn sie sich gleich verhalten bezüglich dem Enthaltensein in L für alle Verlängerungen um das gleiche Suffix.

Nerode-Relation einer Sprache

Definition der Nerode-Relation $\sim_L$

Sei L eine formale Sprache über Σ dann gilt für $u, v \in \Sigma^*$

$$u \sim_L v \text{ g.d.w. } \forall w : uw \in L \iff vw \in L$$

D.h. Wörter u, v sind äquivalent bezüglich $\sim_L$, wenn sie sich gleich verhalten bezüglich dem Enthaltensein in L für alle Verlängerungen um das gleiche Suffix.

Abstimmung: Sei $L = \{aaa\}$ eine formale Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L. Welche Äquivalenzen gelten?

A $a \sim_L aa$

B $aaa \sim_L aaa$

C $aaaaa \sim_L \varepsilon$

D $aaaa \sim_L aaaaaa$

Nerode-Relation einer Sprache

Definition der Nerode-Relation $\sim_L$

Sei L eine formale Sprache über Σ dann gilt für $u, v \in \Sigma^*$

$$u \sim_L v \text{ g.d.w. } \forall w : uw \in L \iff vw \in L$$

D.h. Wörter u, v sind äquivalent bezüglich $\sim_L$, wenn sie sich gleich verhalten bezüglich dem Enthaltensein in L für alle Verlängerungen um das gleiche Suffix.

Abstimmung: Sei $L = \{aaa\}$ eine formale Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L. Welche Äquivalenzen gelten?

A $a \sim_L aa$ Nein

B $aaa \sim_L aaa$ Ja

C $aaaaa \sim_L \varepsilon$ Nein

D $aaaa \sim_L aaaaaa$ Ja

Nerode-Relation einer Sprache (2)

Sei $L = \{a^i \$ b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.

Welche Äquivalenzen gelten?

- A $a^5\$ \sim_L a^6\$$
- B $a^i\$b^i \sim_L a^j\$b^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$
- C $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$
- D $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Nerode-Relation einer Sprache (2)

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.

Welche Äquivalenzen gelten?

- A $a^5\$ \sim_L a^6\$$ Ja
- B $a^i\$b^i \sim_L a^j\$b^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ Ja
- C $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Nein
- D $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Ja

Nerode-Relation einer Sprache (2)

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.

Welche Äquivalenzen gelten?

A $a^5\$ \sim_L a^6\$$ Ja

B $a^i\$b^i \sim_L a^j\$b^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ Ja

C $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Nein

D $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Ja

Für welche Wörter u gilt $\$\$ \sim_L u$?

A $u = \varepsilon$

B $u = \$$

C $u = \$\$\$$

D $u = b^i\$a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Nerode-Relation einer Sprache (2)

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.

Welche Äquivalenzen gelten?

A $a^5\$ \sim_L a^6\$$ Ja

B $a^i\$b^i \sim_L a^j\$b^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ Ja

C $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Nein

D $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Ja

Für welche Wörter u gilt $\$\$ \sim_L u$?

A $u = \varepsilon$ Nein

B $u = \$$ Nein

C $u = \$\$\$$ Ja

D $u = b^i\$a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ Nein (wegen $i = 0$)

Nerode-Index

Nerode-Index: Anzahl der disjunkten Äquivalenzklassen von $\sim_L$.

D.h.

- Index($\sim_L$) $= n$ falls $\Sigma^* = [a_1]_{\sim_L} \cup [a_2]_{\sim_L} \cup \cdots \cup [a_n]_{\sim_L}$ mit $a_i \not\sim_L a_j$ für alle $i \neq j$
- Index($\sim_L$) $= \infty$ falls $\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} [a_i]_{\sim_L}$ mit $a_i \not\sim_L a_j$ für alle $i \neq j$

Abstimmung: Sei $L = \{aaa\}$. Bestimme Index($\sim_L$).

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

F 5

G 6

H ∞

Nerode-Index

Nerode-Index: Anzahl der disjunkten Äquivalenzklassen von $\sim_L$.

D.h.

- $\text{Index}(\sim_L) = n$ falls $\Sigma^* = [a_1]_{\sim_L} \cup [a_2]_{\sim_L} \cup \cdots \cup [a_n]_{\sim_L}$ mit $a_i \not\sim_L a_j$ für alle $i \neq j$
- $\text{Index}(\sim_L) = \infty$ falls $\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} [a_i]_{\sim_L}$ mit $a_i \not\sim_L a_j$ für alle $i \neq j$

Abstimmung: Sei $L = \{aaa\}$. Bestimme $\text{Index}(\sim_L)$.

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

F 5

G 6

H ∞

5 disjunkte Äquivalenzklassen:

$[\varepsilon]_{\sim_L}$

$[a]_{\sim_L}$

$[aa]_{\sim_L}$

$[aaa]_{\sim_L}$

$[aaaa]_{\sim_L}$

Nerode-Index

Nerode-Index: Anzahl der disjunkten Äquivalenzklassen von $\sim_L$.
D.h.

- $\text{Index}(\sim_L) = n$ falls $\Sigma^* = [a_1]_{\sim_L} \cup [a_2]_{\sim_L} \cup \cdots \cup [a_n]_{\sim_L}$ mit $a_i \not\sim_L a_j$ für alle $i \neq j$
- $\text{Index}(\sim_L) = \infty$ falls $\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} [a_i]_{\sim_L}$ mit $a_i \not\sim_L a_j$ für alle $i \neq j$

Abstimmung: Sei $L = \{aaa\}$. Bestimme $\text{Index}(\sim_L)$.

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4
F 5
G 6
H ∞

5 disjunkte Äquivalenzklassen:
$[\varepsilon]_{\sim_L}$
$[a]_{\sim_L}$
$[aa]_{\sim_L}$
$[aaa]_{\sim_L}$
$[aaaa]_{\sim_L}$

Satz von Myhill und Nerode

Formale Sprache L ist regulär g.d.w. $\text{Index}(\sim_L)$ endlich ist.

Regulär / Nichtregulär

Abstimmung:

Prüfe, ob L regulär ist, nur durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

$$L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Antwort: Ja oder Nein + Begründung.

Regulär / Nichtregulär

Abstimmung:

Prüfe, ob L regulär ist, nur durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

$$L = \{a^i \$ b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Antwort: Ja oder Nein + Begründung.

Index bestimmen:

$[\varepsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben.
$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L} =$ Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben.
$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen.

$\text{Index}(L) = 3$, daher ist L regulär.

Regulär / Nichtregulär (2)

Abstimmung:

Prüfe, ob L regulär ist, nur durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

$$L = \{a^i \$ b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Antwort: Ja oder Nein + Begründung.

Regulär / Nichtregulär (2)

Abstimmung:

Prüfe, ob L regulär ist, nur durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

$$L = \{a^i \$ b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Antwort: Ja oder Nein + Begründung.
Index bestimmen:

Index ist unendlich, man muss nur unendlich viele verschiedene Wörter angeben.

- Z.B. $a^i \not\sim_L a^j$ für alle $i \neq j$, da $a^i \$ b^i \in L$ aber $a^j \$ b^i \notin L$ ($\$ b^i$ bezeugt $a^i \not\sim_L a^j$)
- Z.B. $a^i \$ b \not\sim_L a^j \$ b$ für alle $i \neq j$ (b^{i-1} bezeugt $a^i \$ b \not\sim_L a^j \$ b$)

Daher Index$(L) = \infty$ und L nicht regulär.

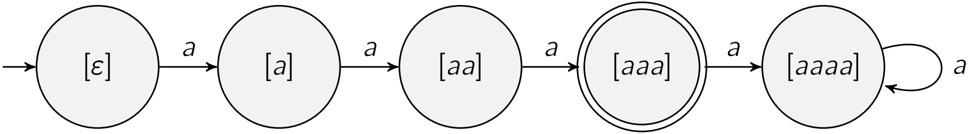
Nerode-Automat

Der DFA, der die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation als Zustände hat:
Übergang = Anhängen und Wechsel in die Äquivalenzklasse
Endzustände = Äquivalenzklassen $[w]_{\sim_L}$ mit $w \in L$

Beispiel: $L = \{aaa\}$

Disjunkte Äquivalenzklassen:
$[\varepsilon]_{\sim_L}$, $[a]_{\sim_L}$, $[aa]_{\sim_L}$, $[aaa]_{\sim_L}$ $[aaaa]_{\sim_L}$

Nerode-Automat:



Minimierung von DFAs

Algorithmus in Kurzform:

1) Entferne nicht erreichbare Zustände
2) Berechne alle Paare von Zuständen, die nicht äquivalent sind
3) Vereinige äquivalente Zustände des Automaten:
   Ergibt Äquivalenzklassenautomat

Definition: Äquivalente Zustände z, z': $\widehat{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\widehat{\delta}(z', w) \in E$

Minimierung von DFAs

Algorithmus in Kurzform:

1) Entferne nicht erreichbare Zustände
2) Berechne alle Paare von Zuständen, die nicht äquivalent sind
3) Vereinige äquivalente Zustände des Automaten:
   Ergibt Äquivalenzklassenautomat

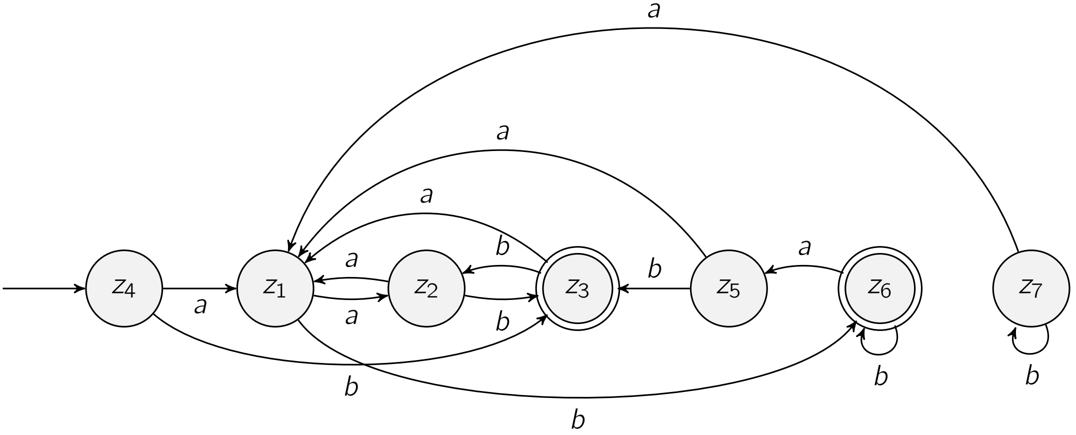
Definition: Äquivalente Zustände z, z': $\widehat{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\widehat{\delta}(z', w) \in E$

Berechnung der nicht äquivalenten Zustände:

1) Markiere alle $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$.
2) Solange es noch neu markierte Paare gibt:
   Prüfe für alle Paare $\{z_1, z_2\}$ und alle $a \in \Sigma$, ob $(\delta(z_1, a), \delta(z_2, a))$ markiert ist.
   Wenn ja, dann markiere $\{z_1, z_2\}$.
3) Alle nicht markierten Paare sind äquivalent.

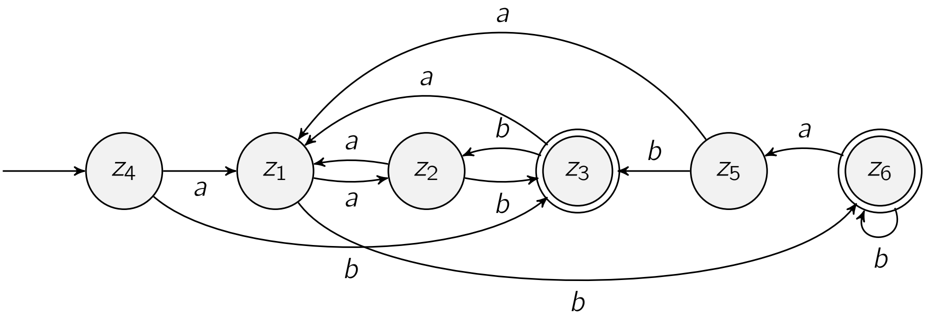
Danach Äquivalenzklassen-Automat hinzeichnen nicht vergessen.

Beispiel



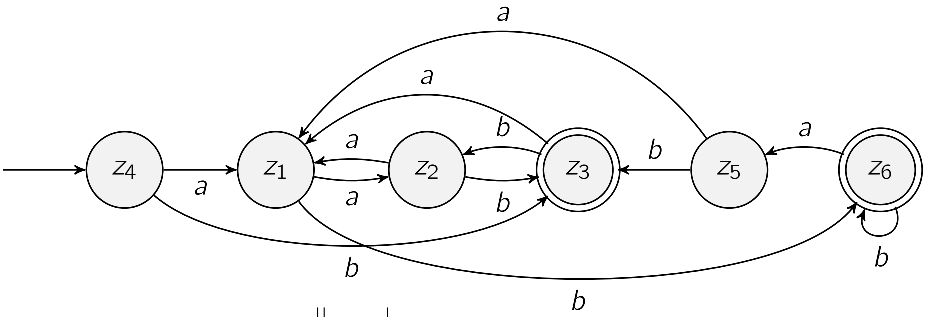
Was machen?

Beispiel



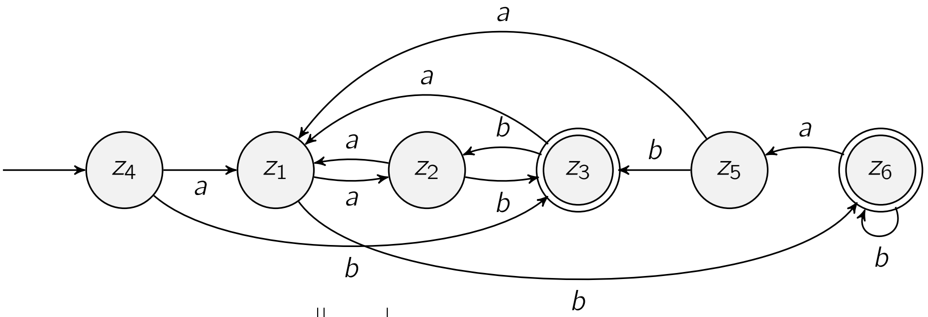
Was machen? Nicht erreichbare Zustände entfernen

Nicht äquivalente Zustände berechnen



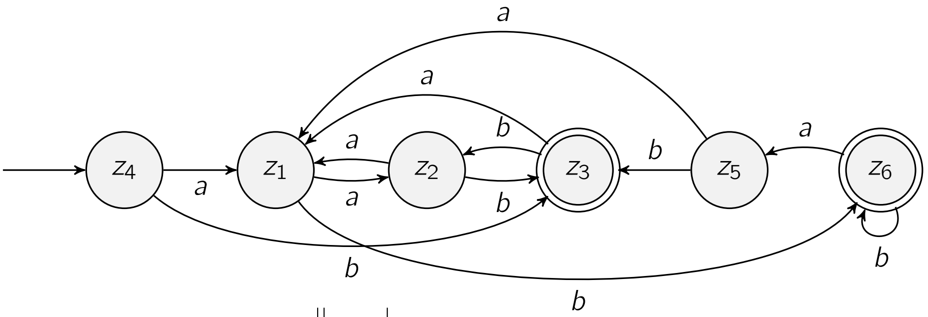
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_2					
z_3					
z_4					
z_5					
z_6					

Nicht äquivalente Zustände berechnen



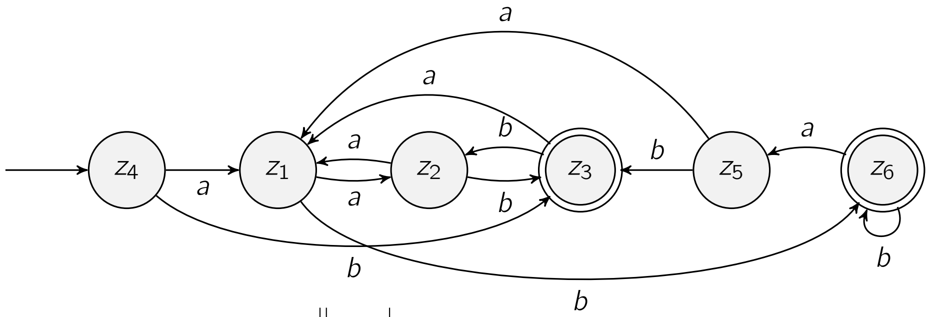
z_2					
z_3	×	×			
z_4			×		
z_5			×		
z_6	×	×		×	×
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Nicht äquivalente Zustände berechnen



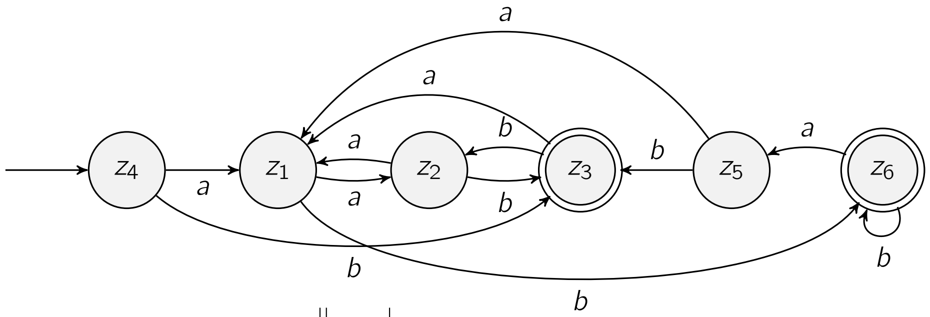
z_2					
z_3	×	×			
z_4			×		
z_5			×		
z_6	×	×	×	×	×
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Nicht äquivalente Zustände berechnen



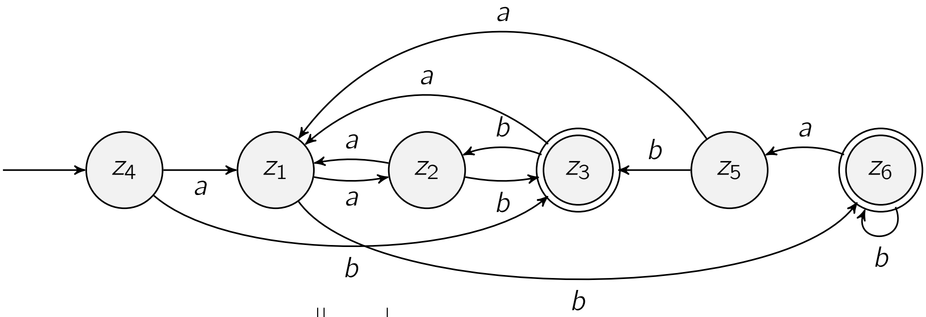
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_2	×				
z_3	×	×			
z_4			×		
z_5			×		
z_6	×	×	×	×	×

Nicht äquivalente Zustände berechnen



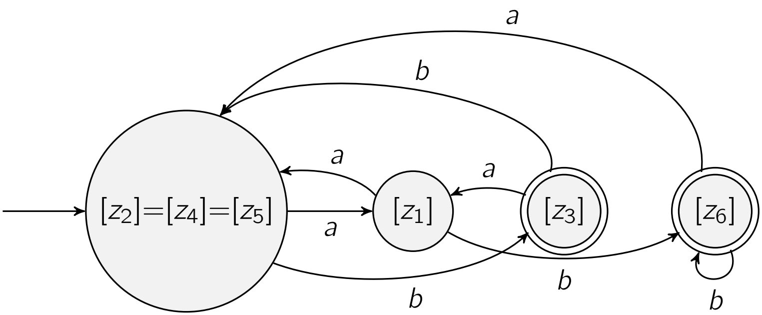
z_2	×				
z_3	×	×			
z_4	×		×		
z_5			×		
z_6	×	×	×	×	×
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Nicht äquivalente Zustände berechnen



	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_2	×				
z_3	×	×			
z_4	×		×		
z_5	×		×		
z_6	×	×	×	×	×

Minimaler DFA



Nerode-Automat, Äquivalenzklassenautomat und Minimalautomat

Nerode-Automat, Äquivalenzklassenautomat und Minimalautomat

Sei L die akzeptierte reguläre Sprache

Nerode-Automat

DFA, der konstruiert wird als: Zustände sind Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\sim_L \subseteq (\Sigma^*) \times (\Sigma^*)$
wobei: $u \sim_L v \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$

Nerode-Automat, Äquivalenzklassenautomat und Minimalautomat

Sei L die akzeptierte reguläre Sprache

Nerode-Automat

DFA, der konstruiert wird als: Zustände sind Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\sim_L \subseteq (\Sigma^*) \times (\Sigma^*)$
wobei: $u \sim_L v \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$

Äquivalenzklassenautomat

DFA, der konstruiert wird aus gegebenem DFA für L:
Zustände sind Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\equiv \subseteq (Z \times Z)$, wobei: $z_i \equiv z_j \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z_i, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z_j, w) \in E$

Nerode-Automat, Äquivalenzklassenautomat und Minimalautomat

Sei L die akzeptierte reguläre Sprache

Nerode-Automat

DFA, der konstruiert wird als: Zustände sind Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\sim_L \subseteq (\Sigma^*) \times (\Sigma^*)$
wobei: $u \sim_L v \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$

Äquivalenzklassenautomat

DFA, der konstruiert wird aus gegebenem DFA für L:
Zustände sind Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\equiv\, \subseteq (Z \times Z)$, wobei: $z_i \equiv z_j \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z_i, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z_j, w) \in E$

Minimalautomat

DFA, der L erkennt und eine minimale Anzahl von Zuständen hat

Nerode-Automat, Äquivalenzklassenautomat und Minimalautomat

Sei L die akzeptierte reguläre Sprache

Nerode-Automat

DFA, der konstruiert wird als: Zustände sind Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\sim_L \subseteq (\Sigma^*) \times (\Sigma^*)$
wobei: $u \sim_L v \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$

Äquivalenzklassenautomat

DFA, der konstruiert wird aus gegebenem DFA für L:
Zustände sind Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\equiv \subseteq (Z \times Z)$, wobei: $z_i \equiv z_j \iff$ für alle $w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z_i, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z_j, w) \in E$

Minimalautomat

DFA, der L erkennt und eine minimale Anzahl von Zuständen hat

Aber: Alle drei Automaten sind (bis auf Umbenennung) identisch.

Abschlusseigenschaften

Abschlusseigenschaften für Typ 3-Sprachen

Seien L_1, L_2 regulär, dann sind $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^*, \overline{L_1}, L_1 \circ L_2$ auch regulär.

Aus dem Aufgabenblatt 3:

- L regulär, dann auch $\{\overline{w} \mid w \in L\}$ regulär.

Verwendung der Abschlusseigenschaften (1)

Abschlusseigenschaft für Schnitt nochmal:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Abstimmung: Welche Folgerungen sind korrekt?

- A Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder L_1 noch L_2 regulär.
- B Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.
- C Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und L_1 regulär ist, dann ist L_2 nicht regulär.
- D Wenn L_1 und L_2 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

Verwendung der Abschlusseigenschaften (1)

Abschlusseigenschaft für Schnitt nochmal:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Abstimmung: Welche Folgerungen sind korrekt?

A Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder L_1 noch L_2 regulär.

B Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.

C Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und L_1 regulär ist, dann ist L_2 nicht regulär.

D Wenn L_1 und L_2 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

Antwort: **C**

Verwendung der Abschlusseigenschaften (2)

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von L mit Abschlusseigenschaften

- Nehme an, dass L regulär ist
- Operiere auf L unter Erhaltung der Regularität:
  - komplementiere, drehe Sprache um, bilde Kleeneschen Abschluss,
  - schneide, vereinige, multipliziere L mit regulärer Sprache
- Kommt dabei eine bekannte **nicht reguläre** Sprache heraus,
  dann hat man einen **Widerspruch**
  und die Annahme war falsch.
  Daher ist L dann nicht regulär.

Verwendung der Abschlusseigenschaften (3)

Zeige: $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist nicht regulär.

Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen bezüglich Schnitt:

L_1 und L_2 regulär $\implies$ $L_1 \cap L_2$ regulär

Setze

- $L_1 = L(0^*1^*)$
- $L_2 = S$
- $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beweis durch Widerspruch:

- Nehme an: S ist regulär.
- Da L_1 regulär ist muss (aufgrund der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen) auch $L_1 \cap S$ regulär sein.
- Aber $L_1 \cap S = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.
- Widerspruch.
- Daher war die Annahme falsch und S ist nicht regulär.

Verwendung der Abschlusseigenschaften (4)

Zeige: $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist nicht regulär.

Kontraposition der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen bezüglich Schnitt:

$L_1 \cap L_2$ nicht regulär $\implies$ L_1 oder L_2 nicht regulär

(Kontraposition: $A \implies B$ g.d.w. $\neg B \implies \neg A$)

Verwendung der Abschlusseigenschaften (4)

Zeige: $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist nicht regulär.

Kontraposition der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen bezüglich Schnitt:

$L_1 \cap L_2$ nicht regulär $\implies$ L_1 oder L_2 nicht regulär

(Kontraposition: $A \implies B$ g.d.w. $\neg B \implies \neg A$)

Setze

- $L_1 = L(0^*1^*)$
- $L_2 = S$
- $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Verwendung der Abschlusseigenschaften (4)

Zeige: $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist nicht regulär.

Kontraposition der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen bezüglich Schnitt:

$L_1 \cap L_2$ nicht regulär $\implies$ L_1 oder L_2 nicht regulär

(Kontraposition: $A \implies B$ g.d.w. $\neg B \implies \neg A$)

Setze

- $L_1 = L(0^*1^*)$
- $L_2 = S$
- $L_1 \cap L_2 = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Wir wissen bereits

- L_1 ist regulär
- $L_1 \cap L_2$ ist nicht regulär

Verwendung der Abschlusseigenschaften (4)

Zeige: $S = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\}$ ist nicht regulär.

Kontraposition der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen bezüglich Schnitt:

$L_1 \cap L_2$ nicht regulär $\implies$ L_1 oder L_2 nicht regulär

(Kontraposition: $A \implies B$ g.d.w. $\neg B \implies \neg A$)

Setze

- $L_1 = L(0^*1^*)$
- $L_2 = S$
- $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Wir wissen bereits

- L_1 ist regulär
- $L_1 \cap L_2$ ist nicht regulär

Mit Kontraposition der Abschlusseigenschaft:

L_1 ist nicht regulär oder L_2 ist nicht regulär.

Da L_1 regulär, muss $L_2 = S$ nicht regulär sein.

Verwendung von Abschlusseigenschaften (5)

Zeige $T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

Ideen?

Verwendung von Abschlusseigenschaften (5)

Zeige $T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

Ideen?

Beweis durch Widerspruch:

- Annahme: T ist regulär.
- Dann ist aufgrund der Abschlusseigenschaft für das Komplement auch $\overline{T}$ regulär.
- Da $L(a^* b^*)$ regulär ist, gilt mit der Abschlusseigenschaft für den Schnitt auch, dass $\overline{T} \cap L(a^* b^*)$ regulär ist.
- Aber: $\overline{T} \cap L(a^* b^*) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.
- Widerspruch.
- Daher kann T nicht regulär sein.

Verwendung von Abschlusseigenschaften (6)

Aufpassen das man sich nicht betrügt:
Die folgenden Beweise sind alle **falsch**:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

Verwendung von Abschlusseigenschaften (6)

Aufpassen das man sich nicht betrügt:
Die folgenden Beweise sind alle **falsch**:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.
- $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.

Verwendung von Abschlusseigenschaften (6)

Aufpassen das man sich nicht betrügt:
Die folgenden Beweise sind alle **falsch**:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.
- $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.
- $L_1 = \{\varepsilon, c\}$ ist regulär, $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär, also ist $L = \{c^i a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\}$ nicht regulär. (Beweisargument ist falsch.)