FSK
Zentralübung 3

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 10. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Reguläre Ausdrücke

Übersicht über die Konstrukte (α bzw α_i sind dabei reguläre Ausdrücke):

Syntax	Semantik
$\emptyset$	$L(\emptyset) = \emptyset$
ε	$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
a (mit $a \in \Sigma$)	$L(a) = \{a\}$
$\alpha_1\alpha_2$	$L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$
$(\alpha_1 \mid \alpha_2)$	$L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$
$(\alpha)^*$	$L(\alpha)^*$

Beachte:

- Es gibt verschiedene Notationen (je nach Vorliebe). Manchhmal $(\alpha_1 + \alpha_2)$ statt $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$
- Ein Konstrukt ist eigentlich überflüssig:

Abstimmung

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

A $\emptyset$

B ε

C $(\alpha)^*$

D $\alpha_1\alpha_2$

E $(\alpha_1|\alpha_2)$

Abstimmung

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

A $\emptyset$

B ε

C $(\alpha)^*$

D $\alpha_1\alpha_2$

E $(\alpha_1|\alpha_2)$

Richtig: B, also ε, da es durch $(\emptyset)^*$ dargestellt werden kann:
$L((\emptyset)^*) = \emptyset^* = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \ldots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \ldots = \{\varepsilon\}$

Aufgabe

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}?$$

A $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$

B $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$

C $(aaaa|bbbb)$

D $(ab|ab|ab|ab)$

E $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

Aufgabe

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}?$$

- A $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$
- B $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$
- C $(aaaa|bbbb)$
- D $(ab|ab|ab|ab)$
- E $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

B und E sind beide richtig.

Aufgabe

Geben Sie einen regulären Audruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

Aufgabe

Geben Sie einen regulären Audruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

$$(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)$$

oder

$$(\varepsilon \mid (a|b) \mid (a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b)(a|b))$$

Aufgabe

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

Aufgabe

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

$$(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)^*$$

Komplement von regulären Ausdrücken

- Allgemein: Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.
- Harte Methode: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA $\rightarrow$ DFA $\rightarrow$ DFA für das Komplement $\rightarrow$ regulärer Ausdruck
- Einfachere Methode:
  1.Schritt: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ einfache Beschreibung der erzeugten Sprache
  2.Schritt: $\rightarrow$ einfache Beschreibung des Komplements
  3.Schritt: $\rightarrow$ regulärer Ausdruck

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

$\rightarrow$ Abstimmung

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

$\rightarrow$ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

→ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

→ Abstimmung

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

$\rightarrow$ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

$\rightarrow$ Abstimmung

$$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten} \\ &= \text{Wörter, die keine 1 enthalten} \cup \text{Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

$\rightarrow$ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

$\rightarrow$ Abstimmung

$$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten} \\ &= \text{Wörter, die keine 1 enthalten} \cup \text{Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Schritt: Reguläre Ausdrücke erzeugen.

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten.

$\rightarrow$ Abstimmung.

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von 0^*10^* erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

→ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

→ Abstimmung

$$\overline{L(0^*10^*)} = \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten}$$
$$= \text{Wörter, die keine 1 enthalten} \cup \text{Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}$$

3. Schritt: Reguläre Ausdrücke erzeugen.

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten.

→ Abstimmung. 0^*

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von 0^*10^* erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

→ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

→ Abstimmung

$$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten} \\ &= \text{Wörter, die keine 1 enthalten} \cup \text{Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Schritt: Reguläre Ausdrücke erzeugen.

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten.

→ Abstimmung. 0^*

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten.

→ Abstimmung.

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von 0^*10^* erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

→ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

→ Abstimmung

$\overline{L(0^*10^*)} =$ Wörter über $\{0, 1\}$, die keine oder mindestens 2 1en enthalten

$=$ Wörter, die keine 1 enthalten $\cup$ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

3. Schritt: Reguläre Ausdrücke erzeugen.

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0, 1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten.

→ Abstimmung. 0^*

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0, 1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten.

→ Abstimmung. $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von 0^*10^* erzeugten Sprache*

1. Schritt: Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

$\rightarrow$ Abstimmung $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0{,}1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Schritt: Was ist das Komplement (in natürlichsprachlicher Beschreibung) davon?

$\rightarrow$ Abstimmung

$$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten}\\ &= \text{Wörter, die keine 1 enthalten} \cup \text{Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Schritt: Reguläre Ausdrücke erzeugen.

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0, 1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten.

$\rightarrow$ Abstimmung. 0^*

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0, 1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten.

$\rightarrow$ Abstimmung. $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$

Regulärer Ausdruck für das Komplement von 0^*10^*: $0^*|(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$

Aufgabe: Regulärer Ausdruck → Endlicher Automat

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

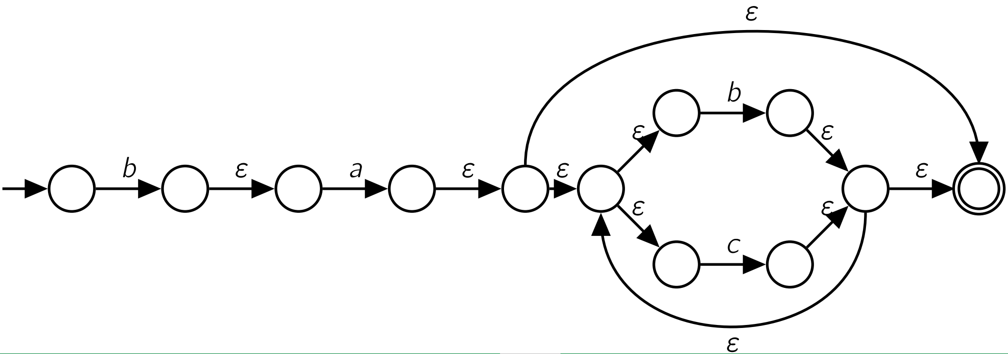
erzeugte Sprache akzeptiert.

Aufgabe: Regulärer Ausdruck → Endlicher Automat

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

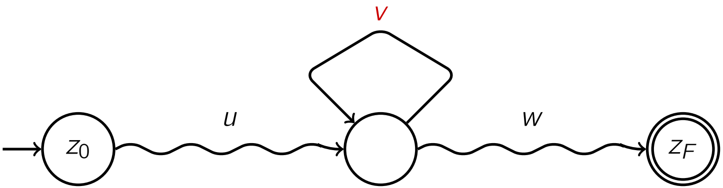
$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.



Pumping-Lemma

Idee



- Wenn ein endlicher Automat n **Zustände** hat,
  dann müssen akzeptierte Wörter der **Länge** $\geq n$ eine Schleife durchlaufen
- Diese Wörter kann man aufpumpen: uvw, $uvvw$,$uvvvw$, ...
  (oder abpumpen uw).
  Allgemein: uv^iw für $i = 0, 1, 2, \ldots$ liegen in der erkannten. Sprache

Abstimmung

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

- A Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit uv^iw liegt nicht in L.
- B Sei L eine formale Sprache. Dann ist L regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.
- C Sei L eine formale Sprache. Dann ist L keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit uv^iw liegt nicht in L.
- D Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.
- E Sei L eine formale Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$. Dann ist L regulär.

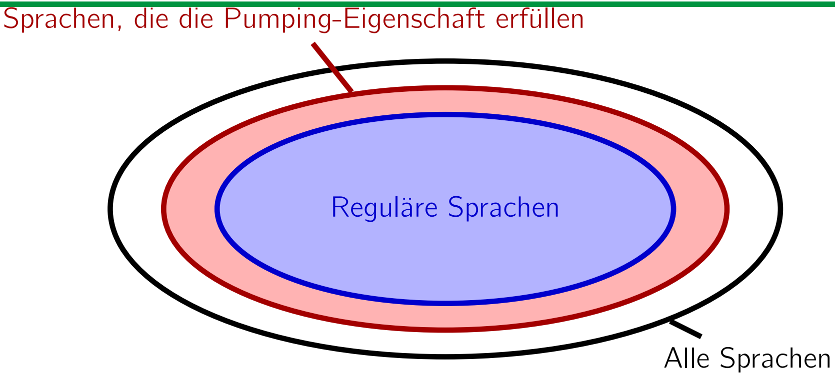
Abstimmung

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

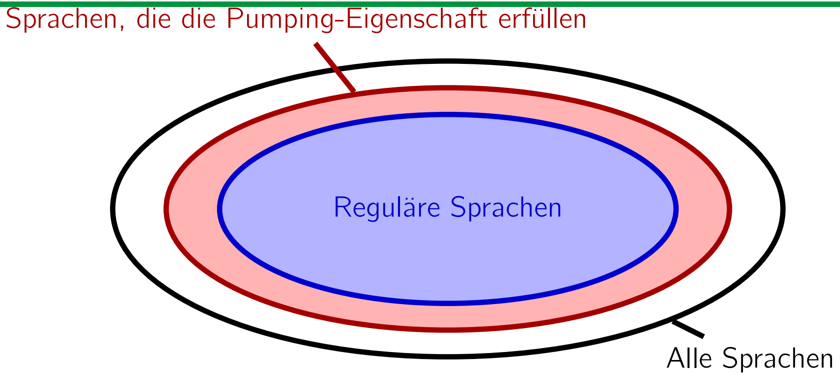
- A Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit uv^iw liegt nicht in L.
- B Sei L eine formale Sprache. Dann ist L regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.
- C Sei L eine formale Sprache. Dann ist L keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit uv^iw liegt nicht in L.
- D Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$.
- E Sei L eine formale Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L, welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und uv^iw liegt in L für alle $i \geq 0$. Dann ist L regulär.

$\rightarrow$ nur die Formulierungen C und D sind korrekt.

Mengendiagramm



Mengendiagramm



Wichtige Konsequenz

Das Pumping-Lemma kann <u>nicht</u> verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

Anwendung des Pumping-Lemmas

- Pumping-Lemma:
  Sprache regulär $\implies$ Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft
- Zeige, dass eine Sprache nicht regulär ist, durch Kontraposition:

> Sprache erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft
> $\implies$ Sprache ist **nicht** regulär

Erfüllt / erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft

Formale Sprache L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Formale Sprache L erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft:

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$,
sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit

- $|uv| \leq n$ und
- $|v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert mit $uv^iw \notin L$.

Anwendung des Pumping-Lemmas

- Pumping-Lemma:
  Sprache regulär $\implies$ Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft
- Zeige, dass eine Sprache nicht regulär ist, durch Kontraposition:

Sprache erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft
$\implies$ Sprache ist **nicht** regulär

Formale Sprache L erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft:

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$,
sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit

- $|uv| \leq n$ und
- $|v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert mit $uv^iw \notin L$.

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 1

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n = 100$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 1

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n = 100$ vom Gegner gewählt.
   Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 2

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^2 b^2 \in L$.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 2

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^2 b^2 \in L$.
   Nein: $|z| \geq n$ gilt nicht.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 3

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^n$.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 3

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^n$.
   Nein: $z \in L$ gilt nicht.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 4

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Der Gegner zerlegt z in $z = uvw$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$ und $w = b^n$
   (damit ist $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Falsche Beweisversuche: Versuch 4

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Der Gegner zerlegt z in $z = uvw$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$ und $w = b^n$
   (damit ist $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt).
   Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel: Mit vielen Fehlern

Aufgabe

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Korrekter Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
   Sei z zerlegt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).
   Dann ist $u = a^j$, $v = a^k$ und $w = a^l b^n$ mit $k > 0$, $j + k + l = n$ und damit für $i = 0$: $uv^i w = a^{n-k} b^n \notin L$.

Beispiel: Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \geq 1$ eine Zerlegung von z.
- Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$. Dann ist $uv^0w = a^{n-e}a^n \notin L$.
  D.h. das Pumping-Lemma zeigt, dass L nicht regulär ist.

Beispiel: Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \geq 1$ eine Zerlegung von z.
- Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$. Dann ist $uv^0w = a^{n-e}a^n \notin L$.
  D.h. das Pumping-Lemma zeigt, dass L nicht regulär ist.

Beispiel: Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

~~Beweis~~ mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \geq 1$ eine Zerlegung von z.
- Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$. Dann ist $\cancel{uv^0w = a^{n-e}a^n \notin L}$.
  ~~D.h. das Pumping-Lemma zeigt, dass L nicht regulär ist.~~

Beachte: L **ist regulär**, z.B. wird L durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ erzeugt

Beispiel: L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

Satz

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

Beweis:

- Sei $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- Wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = z[1]z[2]$, w das Suffix von z ohne die ersten beiden Buchstaben.
- Da $z \in L$, ist $z = a^j a^j$ und dann gilt: $v = aa$, $w = a^{j-1}a^{j-1}$. Daher gilt auch: $uv^i w = a^i a^i a^{j-1} a^{j-1} = a^{i+j-1} a^{i+j-1} \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$
- $L_3 = \{a^n \$ a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Satz

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$ (wir suchen aus).

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Abstimmung: Gute Wahl für z?
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$ (wir suchen aus).

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$ (wir suchen aus).

Satz

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$ (wir suchen aus).

Satz

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$ (wir suchen aus).
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}b^n \notin L_1$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^iw \notin L_1$).

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n b^n$ (dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$ (wir suchen aus).
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0 w = a^{n-k} b^n \notin L_1$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^i w \notin L_1$).

Daher erfüllt L_1 nicht die Pumping-Eigenschaft und daher kann L_1 nicht regulär sein.

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$ (wir suchen aus).

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Abstimmung: Gute Wahl für z?
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$ (wir suchen aus).

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n bbc^{n+1}$ (dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$ (wir suchen aus).

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n bbc^{n+1}$ (dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$ (wir suchen aus).

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n bbc^{n+1}$ (dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$ (wir suchen aus).
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher
   $uv^3w = a^{n+2k}bbc^{n+1} \notin L_2$ (d.h. für $i = 3$ gilt $uv^iw \notin L_2$).

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n bbc^{n+1}$ (dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$ (wir suchen aus).
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher
   $uv^3w = a^{n+2k}bbc^{n+1} \notin L_2$ (d.h. für $i = 3$ gilt $uv^iw \notin L_2$).

Daher erfüllt L_2 nicht die Pumping-Eigenschaft und daher kann L_2 nicht regulär sein.

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$ (wir suchen aus).

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Abstimmung: Gute Wahl für z?
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$ (wir suchen aus).

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n\$a^n$ (dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$ (wir suchen aus).

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n\$a^n$ (dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner").
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$ (wir suchen aus).

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n\$a^n$ (dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$ (wir suchen aus).
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}\$a^n \notin L_3$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^iw \notin L_3$).

Satz

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   Sei $z = a^n\$a^n$ (dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$).
3. Sei $z = uvw$ beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ („vom Gegner“).
   Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n, |v| \geq 1$ eine Zerlegung von z.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$ (wir suchen aus).
   Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}\$a^n \notin L_3$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^iw \notin L_3$).

Daher erfüllt L_3 nicht die Pumping-Eigenschaft und daher kann L_3 nicht regulär sein.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei $n \geq 1$ und $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- Da z von der Form $a^k b^\ell c^\ell$ ist, muss $k > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{k-1} b^\ell c^\ell$. Da $|v| = 1$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w = a^{k+i-1} b^\ell c^\ell \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$, erfüllt L die Pumping-Eigenschaft.