Institut für Informatik der Ludwig-Maximilians-Universität München
Prof. Dr. David Sabel
Stephan Barth
Sarah Vaupel

SoSe 2022
17.08.2022

Lösung zur Klausur zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Hilfsmittel sind nicht erlaubt, auch der Besitz ausgeschalteter elektronischer Geräte wird als Betrug gewertet. Schreiben Sie Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf dieses Deckblatt, sowie Ihren Namen in die Kopfzeile auf **jedem Blatt** der Klausurangabe! Geben Sie alle Blätter ab, lassen Sie diese zusammengeheftet! Verwenden Sie nur **dokumentenechte Stifte** und **weder** die Farben **rot noch grün**.

Kontrollieren Sie, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben. Aufgabenstellungen befinden sich auf den **Seiten 1–7**. Sie dürfen die Rückseiten für Nebenrechnungen nutzen. Falls Sie die Rückseiten für Antworten nutzen, so markieren Sie klar, was zu welcher Aufgabe gehört und schreiben Sie in der entsprechenden Aufgabe, wo alle Teile Ihrer Antwort zu finden sind. Streichen Sie alles durch, was nicht korrigiert werden soll!

Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig durch, bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen. Es gibt 4 unterschiedlich gewichtete Aufgaben zu insgesamt 90 Punkten. Mit 45 Punkten haben Sie sicherlich bestanden. Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur in ausreichend guter gesundheitlicher Verfassung sind, und diese Klausurprüfung verbindlich annehmen.

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Die Klausur soll gewertet werden: ☐ **JA** ☐ **NEIN**

Hinweis: Ist keines der beiden Felder angekreuzt, so wird **JA** angenommen.

Hiermit erkläre ich die Richtigkeit der obigen Angaben:

(Unterschrift)

Die folgende Tabelle **NICHT** ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	Bonus	Note
Punkte	34	28	16	12	**90**		
erreicht							

Lösung Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen): (34 Punkte)

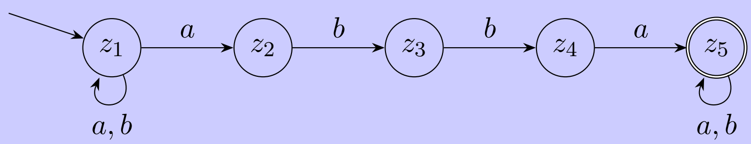
a) Die Sprache $L_1 \subseteq \{a,b\}^*$ sei definiert als:

$$L_1 \quad := \quad \{uabbav \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$$

L_1 enthält daher genau alle Wörter, die *abba* als Teilwort haben.

Geben Sie den Zustandsgraphen eines nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) A_1 an, für den gilt: $L(A_1) = L_1$. (7 Punkte)

LÖSUNG: A_1:



7 Punkte, wenn alles stimmt
1 Punkt Abzug bei fehlendem Startzustand
1 Punkt Abzug bei fehlendem Endzustand

b) Die Sprache $L_2 \subseteq \{a,b\}^*$ sei definiert als:

$$\begin{aligned} L_2 &:= L_3 \cup L_4 \\ L_3 &:= \{w \mid \#_a(w) \geq 2\} \\ L_4 &:= \{w \mid \#_b(w) \leq 3\} \end{aligned}$$

Die Sprache L_2 enthält daher alle Wörter, die mindestens zwei a's oder höchstens drei b's enthalten.

Geben Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L_2$ an. (6 Punkte)

LÖSUNG:

$\alpha = ((a|b)^*a(a|b)^*a(a|b)^*) \mid (a^*(b|\varepsilon)a^*(b|\varepsilon)a^*(b|\varepsilon)a^*)$

6 Punkte = jeweils 3 Punkte für mindestens und höchstens

c) Bestimmen Sie den Nerode-Index der Sprache $L_4 := \{w \mid \#_b(w) \leq 3\}$ und begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

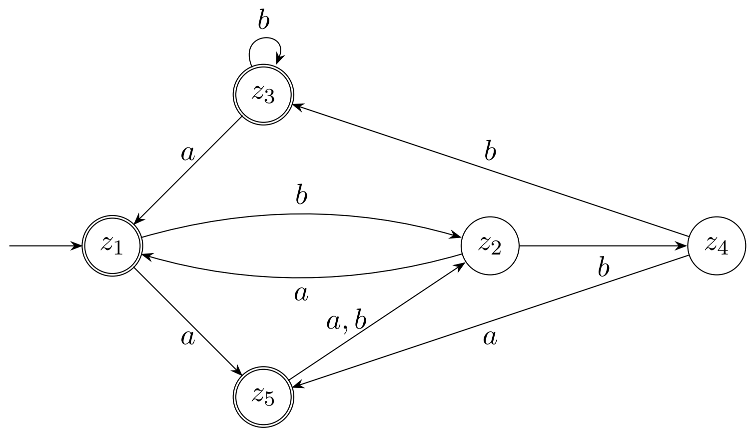
LÖSUNG: L_4:

$[\varepsilon]_{\sim_{L_4}}$ = alle Wörter w mit $\#_b(w) = 0$ $[b]_{\sim_{L_4}}$ = alle Wörter w mit $\#_b(w) = 1$ $[bb]_{\sim_{L_4}}$ = alle Wörter w mit $\#_b(w) = 2$ $[bbb]_{\sim_{L_4}}$ = alle Wörter w mit $\#_b(w) = 3$ $[bbbb]_{\sim_{L_4}}$ = alle Wörter w mit $\#_b(w) > 3$ Die Klassen sind disjunkt, da für b^i und b^j mit $0 \leq i < j \leq 4$ $b^i b^{3-i} \in L$ aber $b^j b^{3-i} \notin L$.

Daher gilt Index$(\sim_{L_4}) = 5$

3 Punkte für richtigen Index, 1 Punkt für Begründung

d) Der folgende Automat A_2



ist bereits ein Minimalautomat mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Begründen Sie für jedes der Zustandspaare

(i) (z_1, z_2)

(ii) (z_1, z_3)

(iii) (z_2, z_4)

warum die beiden Zustände des Paares **nicht äquivalent** sind. (5 Punkte)

LÖSUNG: Zustände z, z' sind äquivalent, gdw. $\forall w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E$.

(i) (z_1, z_2): $\widehat{\delta}(z_1, \varepsilon) = z_1 \in E$ aber $\widehat{\delta}(z_2, \varepsilon) = z_2 \notin E$

(ii) (z_1, z_3): $\widehat{\delta}(z_1, b) = z_2 \notin E$ aber $\widehat{\delta}(z_3, b) = z_3 \in E$

(iii) (z_2, z_4): $\widehat{\delta}(z_2, aa) = z_5 \in E$ aber $\widehat{\delta}(z_4, aa) = z_2 \notin E$ oder
$\widehat{\delta}(z_2, b) = z_4 \notin E$ aber $\widehat{\delta}(z_4, b) = z_5 \in E$

1,2,2 Punkte

e) Sei $N = (Z_1, \Sigma, \delta_1, S_1, E_1)$ ein NFA und $D = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{0,2}, E_2)$ ein DFA.

Erläutern Sie, wie man einen endlichen Automaten M (dieser kann ein DFA oder ein NFA sein) aus den Automaten N und D konstruieren kann, so dass gilt:

$$L(M) = L(N) \cap L(D)$$

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Der Automat M soll dabei $O(|Z_1| \cdot |Z_2|)$ Zustände besitzen. Wenn Ihre Konstruktion korrekt ist, aber mehr Zustände benutzt, erhalten Sie noch Teilpunkte. (12 Punkte)

LÖSUNG:

Für M bietet es sich an den Produktautomat zu bilden:

$M := (Z_1 \times Z_2, \{a, b\}, \delta, S, E)$ mit

$S = \{(q, z_{0,2}) \mid q \in S_1\}$
$E = E_1 \times E_2$
$\delta((q_1, q_2), a) = \{(q_1', \delta_2(q_2)) \mid q_1' \in \delta_1(q_1, a)\}$

Begründung der Korrektheit:

Läufe in den beiden Automaten N und D werden quasi parallel durchgeführt: In der ersten Komponente des aktuellen Zustandpaares für den NFA N und in der zweiten Komponente für den DFA D. Gestartet wird dabei in eiem Paar $(q, z_{0,2})$, wobei q ein Startzustand von N ist und $z_{0,2}$ der Startzustand von D. Akzeptiert wird, wenn beide Automaten einen Endzustand erreicht haben.

Konstruktionen, die aus dem NFA zunächst einen DFA machen, verletzen die Anforderung an die Größe der Zustandsmenge.

Für die Konstruktion: 9 Punkte + 3 Punkte für die Begründung
Abzug bei Determinisierung: 3 Punkte

Lösung Aufgabe 2 (Kontextfreiheit): **(28 Punkte)**

a) Die Sprache L_5 sei definiert als

$$L_5 := \{w \mid w = a^m w', w' \in \{a,b\}^*, m = \#_a(w'), m \geq 0\}$$

Informell: Alle Worte aus L_5 lassen sich in zwei Teilworte $w_1 w_2$ aufteilen, so dass w_1 nur aus a's besteht und w_2 genauso viele a's wie w_1 enthält.

(i) Geben Sie eine **kontextfreie Grammatik** G an, die L_5 erzeugt (d.h. $L(G) = L_5$) und erläutern Sie, warum G die Sprache L_5 erzeugt: Beschreiben Sie beispielsweise, welche „Aufgabe" die einzelnen Nichtterminale bei der Erzeugung übernehmen. (6 Punkte)
Geben Sie zusätzlich eine **Linksableitung** für das Wort $aabbbbaa$ für Ihre Grammatik an. (2 Punkte)

LÖSUNG:

$$\{S \to aSR \mid B, B \to \varepsilon \mid BB \mid b, R \to bR \mid Rb \mid a\}$$

Erläuterung: S erzeugt zunächst $a^m BR^m$ für $m \in \mathbb{N}$ aus B lassen sich beliebige b's erzeugen, die z.B. für den Fall $m = 0$ nötig sind, aus R lassen sich beliebige Wörter über $\{a,b\}^*$ erzeugen, die genau ein a enthalten (rekursiv werden b's links oder rechts erzeugt und im Basisfall das a).
Linksableitung:

$$S \Rightarrow aSR \Rightarrow aaSRR \Rightarrow aaRR \Rightarrow aabRR \Rightarrow aabbRR \Rightarrow aabbbRR \Rightarrow aabbbbRR \Rightarrow aabbbbaR \Rightarrow aabbbbaa$$

6 Punkte für die Grammatik: Dabei 4 Punkte für die Grammatik und 2 Punkte für die Erläuterung
Ableitungen: 2 Punkte, 1 Punkt Abzug, wenn keine Links-Ableitung.

(ii) Zeigen Sie mit dem Pumpinglemma für reguläre Sprachen, dass

$$L_5 = \{w \mid w = a^m w', w' \in \{a,b\}^*, m = \#_a(w'), m \geq 0\}$$

nicht regulär ist.

(10 Punkte)

Zur Erinnerung:

Pumpinglemma für reguläre Sprachen.
Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, so dass gilt:
i) $|uv| \leq n$,
ii) $|v| \geq 1$ und
iii) für alle $i \geq 0$: $uv^i w \in L$.

LÖSUNG: Sei $n > 0$ beliebig.
Geeignete Wahlen für z sind z.B.
$z = a^n(ba)^n$ oder $z = a^n b^n a^n$ oder $z = a^n b a^n$
Beweis mit $z = a^n b a^n$:
Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Dann ist $u = a^{n_1}$, $v = a^{n_2}$, $w = a^{n_3}ba^n$ mit $n = n_1 + n_2 + n_3$ und $n_2 > 0$. Dann ist $uv^0w \notin L_5$, denn $uv^0w = a^{n_1}a^{n_3}ba^n = a^{n-n_2}ba^n$. Damit erfüllt L_5 die Pumpingeigenschaft nicht und das Pumpinglemma zeigt, dass L_5 nicht regulär ist.

- 1 Punkt: $z \in L_5$ gewählt
- 1 Punkt: $|z| \geq n$
- 2 Punkte: z ist geeignet
- 3 Punkte: Über alle Zerlegungen u, v, w argumentiert
- 3 Punkte: Fall gefunden, sodass $uv^kw \notin M$

b) Für eine kontextfreie Grammatik G mit Startsymbol S und Variablen $\{S, T, A, B, C, D, E, F\}$ wurde der CYK-Algorithmus für das Wort *abaaca* ausgeführt. Der Algorithmus hat dabei die folgende Tabelle für die $V(i, j)$-Mengen berechnet:

Wort	a	b	a	a	c	a
$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	T, A	B, D, F	T, A	T, A	C	T, A
2	S, B, C, D, E, F			S, B, C		
3	T		S, B, C	T		
4			T			
5	S, T					
6	T					

(i) Geben Sie anhand obiger Tabelle fünf verschiedene Wörter an, die **nicht** in $L(G)$ liegen und begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

(ii) Geben Sie anhand obiger Tabelle drei verschiedene Wörter an, die in $L(G)$ liegen und begründen Sie Ihre Antwort. (6 Punkte)

LÖSUNG: $ab \in L$, da $S \in V_{1,2}$ $ac \in L$, da $S \in V_{4,2}$ $aac \in L$ da $S \in V_{3,3}$ $abaac \in L$, da $S \in V_{1,5}$ alle andere

Lösung Aufgabe 3 (Berechenbarkeit und PCP): **(16 Punkte)**

Wir erinnern zunächst an die Definition des 01-Postschen Korrespondenzproblems:

Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und sei K eine Folge von Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Das 01-Postsche Korrespondenzproblem (01-PCP) ist die Frage, ob es für die gegebene Folge K eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_m$ mit $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ gilt.

In der Vorlesung wurde die Unentscheidbarkeit des 01-PCP gezeigt.

Für ein Wort $a_1 \cdots a_n$ mit $a_i \in \{0,1\}$ und $n \geq 0$ ist das Komplement $C(a_1 \cdots a_n)$ definiert als $C(a_1) \cdots C(a_n)$ wobei

$$C(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Das Komplement-Postsche Korrespondenzpoblem (CPCP) ist definiert als

Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und sei K eine Folge von Wortpaaren $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Das Komplement-Postsche Korrespondenzproblem (CPCP) ist die Frage, ob es für die gegebene Folge K eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_m$ mit $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt, sodass $C(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ gilt.

a) Es sei $K = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$ mit

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (00, 111) \\ (x_2, y_2) &= (00, 0) \\ (x_3, y_3) &= (11, 0) \\ (x_4, y_4) &= (1, 100) \end{aligned}$$

Alternativ in der Spielstein-Schreibweise

$$K = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 00 \\ 111 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 00 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} \right)$$

Zeigen Sie, dass $K \in \text{CPCP}$ gilt.

(Hinweis: Es gibt Lösungen, die nicht mehr als vier Indizes verwenden).

(6 Punkte)

b) Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit von CPCP, indem Sie 01-PCP auf CPCP reduzieren. (10 Punkte)

LÖSUNG:

a) (i) Für CPCP können Lösungen nicht mit 2 oder 4 beginnen (da diese mit derselben Zahl beginnen). Mit 1,1,2,3 ist eine Lösung:

$$\begin{bmatrix} 00 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 00 \\ 111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 00 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 00000011 \\ 11111100 \end{matrix}$$

b) Sei $f((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)) = ((C(x_1), y_i), \ldots, (C(x_k), y_k))$ und $f(w) = w$ für ungültige Eingaben.

f ist damit total. f ist berechenbar: Eine 2-Band TM liest und dekodiert die Eingabe $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ und schreibt die Ausgabe durch Komplementbildung der x_i (vertausche 0en und 1en) auf das 2. Band.

f ist korrekt, denn:

$$
\begin{aligned}
K \in 01-PCP \quad & \text{gdw.} \quad \text{es gibt } i_1, \ldots, i_n : x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n} \\
& \text{gdw.} \quad \text{es gibt } i_1, \ldots, i_n : C(C(x_{i_1})) \cdots C(C(x_{i_n})) = y_{i_1} \cdots y_{i_n} \\
& \text{gdw.} \quad \text{es gibt } i_1, \ldots, i_n : C(f(x_{i_1})) \cdots C(f(x_{i_n})) = f(y_{i_1}) \cdots f(y_{i_n}) \\
& \text{gdw.} \quad f(K) \in CPCP
\end{aligned}
$$

Bewertung:

- a) 6 Punkte
- b) 10 Punkte:
  Kodierungsfunktion 6 Punkte
  Korrektheit der Kodierung 2 Punkte
  Funktion ist total (1 Punkt)
  Funktion ist berechenbar (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 4 (Gemischte Fragen): **(12 Punkte)**

Pro Frage gibt es **genau eine richtige** Antwort.

Punkte in dieser Aufgabe werden nach folgender Tabelle vergeben. Eine Antwort, bei der 0 oder mindestens 2 Kästchen angekreuzt sind, zählt als falsch.

Richtige Antworten	0	1	2	3	4	5	6
Erzielte Punkte	0	1	3	6	8	10	12

Seien L_6 und L_7 formale Sprachen. Index($\sim_L$) bezeichne den Index der Nerode-Relation von L.

- [X] Wenn Index($\sim_{L_6}$) und Index($\sim_{L_7}$) beide endlich sind, dann ist Index($\sim_{\overline{L_6} \cap L_6 \overline{L_7}}$) endlich.
- [ ] Mit m_1 =Index($\sim_{L_6}$) und m_2 =Index($\sim_{L_7}$) gilt Index($\sim_{L_6 \cup L_7}$)$= \max(m_1, m_2)$, wobei $\max(\infty, m) = \infty = \max(m, \infty)$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- [ ] Wenn $L_6 \subseteq L_7$, dann gilt Index($\sim_{L_6}$) $\leq$ Index($\sim_{L_7}$), wobei $m \leq \infty$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- [ ] Wenn Index($\sim_{L_7}$)$= 1$ und Index($\sim_{L_6 \cup L_7}$)$= 1$, dann gilt $L_6 = L_7$.

μ-rekursive Funktionen sind manchmal

- [ ] nicht WHILE-berechenbar
- [X] nicht LOOP-berechenbar
- [ ] nicht GOTO-berechenbar
- [ ] nicht Turing-berechenbar

Das Präfixfreie Postsche Korrespondenzproblem (PPCP) ist eine Variante des PCP-Problems, welche nur solche Eingaben $((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ verwendet, sodass

$$\text{für alle } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ gilt: } x_i \text{ ist kein Präfix von } y_i \text{ und } y_i \text{ ist kein Präfix von } x_i.$$

Eingaben, die diese Bedingung verletzen, liegen nicht in PPCP. Andere Eingaben liegen in PPCP genau dann, wenn sie in PCP liegen. Es gilt:

- [ ] PPCP ist unentscheidbar, aber semi-entscheidbar
- [ ] PPCP ist entscheidbar, aber nicht semi-entscheidbar
- [ ] PPCP ist unentscheidbar und nicht semi-entscheidbar
- [X] PPCP $\in \mathcal{P}$

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 4:

Wenn $L_8 \in \mathcal{NP}$, dann

- [X] ist L_8 LOOP-berechenbar
- [ ] gilt $L_8 \notin \mathcal{P}$
- [ ] führt jede nichtdeterministische Turingmaschine M mit $L(M) = L_8$ mehr als polynomiell viele Schritte aus, d.h. für jedes Polynom $p(n)$ gilt $ntime_M(|w|) > p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$
- [ ] führt jede deterministische Turingmaschine M mit $L(M) = L_8$ höchstens polynomiell viele Schritte aus, d.h. es gibt ein Polynom $p(n)$, sodass $ntime_M(|w|) \leq p(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

---

Die Grammatik $G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{&A \to a, \\ &A \to BC, \\ &B \to b, \\ &B \to C, \\ &BC \to CD, \\ &D \to b, \\ &D \to B\} \end{aligned}$$

ist

- [ ] in Chomsky-Normalform
- [X] in Kuroda-Normalform
- [ ] vom Typ 2, aber nicht vom Typ 3
- [ ] vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1

Das LOOP-Programm

$$\begin{array}{l} x_0 := x_2 + 5; \\ \textbf{loop } x_1 \textbf{ do} \\ \quad x_0 := x_0 + 2 \\ \textbf{end} \end{array}$$

berechnet die Funktion f mit

- [ ] $f(x) = 2 \cdot x$
- [ ] $f(x, y) = 2 \cdot x + 5$
- [ ] $f(x, y, z) = x \cdot y + 5 \cdot z$
- [X] $f(x, y) = 2 \cdot x + y + 5$