

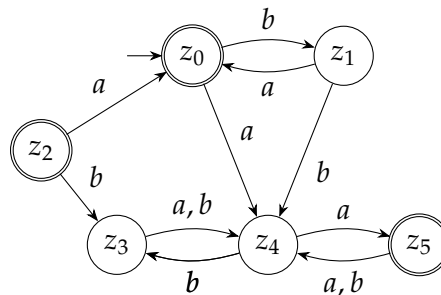
Lösungsvorschlag zur Übung 6 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

FSK6-1 Automaten minimieren

(2 Punkte)

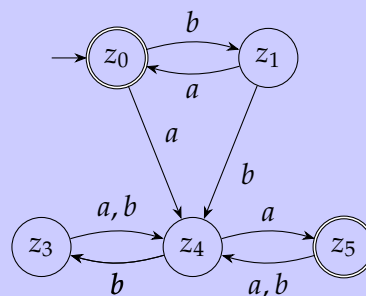
- a) Minimieren Sie den DFA A mit dem Verfahren aus der Vorlesung (Algorithmus 4 im Vorlesungsskript). Geben Sie die Minimierungstabelle und den Minimalautomaten (als Zustandsgraph) an.

A :



LÖSUNGSVORSCHLAG:

Entferne zunächst nicht erreichbare Zustände: Zustand z_2 ist nicht erreichbar, alle anderen sind erreichbar. D.h. wir erhalten den Automaten A' :



Minimierungstabelle:

z_1	*			
z_3	*	$1(z_0, z_4)$		
z_4	*	$2(z_3, z_4)$	$1(z_4, z_5)$	
z_5	$3(z_1, z_4)$	*	*	*
	z_0	z_1	z_3	z_4

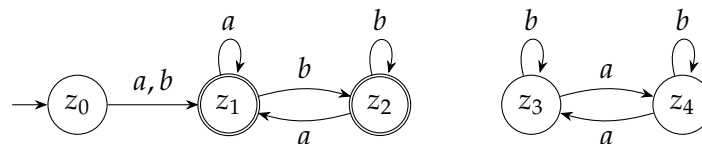
Dabei steht

- * für initial ausgefüllte Zellen (d.h. Paare $\{z, z'\}$ sodass z ein Endzustand ist und z' nicht);
- $i(p, q)$ für Zellen, die im i -ten Durchlauf ausgefüllt werden. Dass die Zustände p und q nicht vereinigt werden dürfen, ist der Grund, wieso das durch diese Tabellenposition festgelegte Zustandspaar auch nicht vereinigt werden darf.

Alle Zustandspaare sind markiert, das heißt es können keine Zustände verschmolzen werden und A' ist bereits minimal.

- b) Berechnen Sie den Äquivalenzklassenautomat B' zum DFA B mit dem Verfahren aus der Vorlesung, *ohne* dabei die von z_0 aus un erreichbaren Zustände zu entfernen. Geben Sie die Minimierungstabelle und B' (als Zustandsgraph) an.

B :

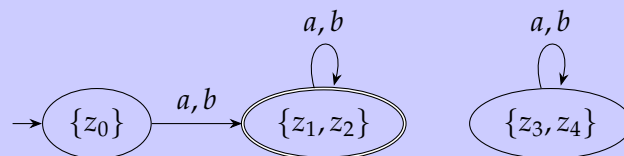


LÖSUNGSVORSCHLAG:

Minimierungstabelle:

z_1	*			
z_2	*			
z_3	$1(z_1, z_4)$	*	*	
z_4	$1(z_1, z_3)$	*	*	
	z_0	z_1	z_2	z_3

Die Zustände z_1 und z_2 sowie z_4 und z_5 sind daher äquivalent und werden im Äquivalenzklassenautomat B' verschmolzen:



- c) Ist der DFA B' minimal? Falls nein, wie kann man ihn minimieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Nein, da $[z_3] = \{z_3, z_4\}$ vom Startzustand $[z_0] = \{z_0\}$ aus unerreichbar ist.

Man kann B' noch minimieren, indem man den unerreichbaren Zustand $[z_3]$ entfernt.

FSK6-2 Konservative Erweiterungen regulärer Ausdrücke II

(2 Punkte)

Für Wörter w über $\Sigma \supseteq \{a, b\}$ sei $\text{replace}(a, b, w)$ das Wort, das aus w entsteht, indem alle a durch b ersetzt werden. Formal definieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned} \text{replace}(a, b, \varepsilon) &= \varepsilon \\ \text{replace}(a, b, aw) &= b \cdot \text{replace}(a, b, w) \\ \text{replace}(a, b, cw) &= c \cdot \text{replace}(a, b, w) \quad (c \neq a) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun *replace-erweiterte reguläre Ausdrücke* (RERAs) über Σ , die wie folgt definiert sind:

- \emptyset, ε und a (für $a \in \Sigma$) sind replace-erweiterte reguläre Ausdrücke.
- Wenn α und β replace-erweiterte reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha \mid \beta)$ und $(\alpha)^*$ replace-erweiterte reguläre Ausdrücke.
- Wenn $a, b \in \Sigma$ und α ein replace-erweiterter regulärer Ausdruck ist, dann ist auch $\text{replace}(a, b, \alpha)$ ein replace-erweiterter regulärer Ausdruck.

Die Semantik sei wie bei regulären Ausdrücken definiert:

$$\begin{array}{lll} L(\emptyset) & = \emptyset & L(\varepsilon) & = \{\varepsilon\} & L(a) & = \{a\} \\ L(\alpha_1\alpha_2) & = L(\alpha_1)L(\alpha_2) & L((\alpha_1 \mid \alpha_2)) & = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) & L((\alpha)^*) & = L(\alpha)^* \end{array}$$

mit der Erweiterung

$$L(\text{replace}(a, b, \alpha)) = \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.$$

Wir zeigen in den folgenden Teilaufgaben, dass die Erweiterung regulärer Ausdrücke mit dem replace-Operator konservativ ist, d.h. dass die RERAs genau die regulären Sprachen erzeugen.

- a) Definieren Sie für jeden (nicht-erweiterten) regulären Ausdruck α einen regulären Ausdruck $\alpha[a := b]$, der identisch zu α ist außer dass jeder Teilausdruck $a \in \Sigma$ durch $b \in \Sigma$ ersetzt wird. Beispiel: $(abc)^*[a := b] = (bbc)^*$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wir definieren die gewünschte Funktion durch Rekursion über α :

$$\begin{array}{l} \varepsilon[a := b] = \varepsilon \\ \emptyset[a := b] = \emptyset \\ a[a := b] = b \quad \text{für } a \in \Sigma \\ c[a := b] = c \quad \text{für } c \in \Sigma \text{ und } c \neq a \\ (\beta\gamma)[a := b] = \beta[a := b]\gamma[a := b] \\ (\beta \mid \gamma)[a := b] = (\beta[a := b] \mid \gamma[a := b]) \\ (\beta)^*[a := b] = (\beta[a := b])^* \end{array}$$

- b) Beweisen Sie, dass für Ihre Funktion aus Teilaufgabe a) und für jeden regulären Ausdruck α gilt:

$$L(\alpha[a := b]) = \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie strukturelle Induktion über α .

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Strukturelle Induktion über α :

- $\alpha = \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}L(\alpha[a := b]) &= L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} = \{\text{replace}(a, b, \varepsilon)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.\end{aligned}$$

- $\alpha = \emptyset$. Dann ist

$$L(\alpha[a := b]) = L(\emptyset) = \emptyset = \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.$$

- $\alpha = a$ für $a \in \Sigma$. Dann ist

$$\begin{aligned}L(\alpha[a := b]) &= L(b) = \{b\} = \{\text{replace}(a, b, a)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.\end{aligned}$$

- $\alpha = c$ für $c \in \Sigma$ und $c \neq a$. Dann ist

$$\begin{aligned}L(\alpha[a := b]) &= L(c) = \{c\} = \{\text{replace}(a, b, c)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.\end{aligned}$$

- $\alpha = \beta\gamma$. Dann ist

$$\begin{aligned}L(\alpha[a := b]) &= L(\beta[a := b]\gamma[a := b]) = L(\beta[a := b]) \circ L(\gamma[a := b]) \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} \{\text{replace}(a, b, u) \mid u \in L(\beta)\} \circ \{\text{replace}(a, b, v) \mid v \in L(\gamma)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, uv) \mid u \in L(\beta), v \in L(\gamma)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.\end{aligned}$$

- $\alpha = (\beta \mid \gamma)$. Dann ist

$$\begin{aligned}L(\alpha[a := b]) &= L(\beta[a := b] \mid \gamma[a := b]) = L(\beta[a := b]) \cup L(\gamma[a := b]) \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\beta)\} \cup \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\gamma)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\beta) \cup L(\gamma)\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.\end{aligned}$$

- $\alpha = (\beta)^*$. Dann ist

$$\begin{aligned}L(\alpha[a := b]) &= L((\beta[a := b])^*) = L(\beta[a := b])^* \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\beta)\}^* = \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\beta)^*\} \\ &= \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.\end{aligned}$$

- c) Nutzen Sie die Funktion aus Teilaufgabe a), um eine Funktion F zu definieren, die jeden RERA α in einen äquivalenten *nicht-erweiterten* regulären Ausdruck $F(\alpha)$ übersetzt.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wieder durch Rekursion über α :

$$\begin{aligned}
 F(\varepsilon) &= \varepsilon \\
 F(\emptyset) &= \emptyset \\
 F(a) &= a \quad \text{für } a \in \Sigma \\
 F(\beta\gamma) &= F(\beta)F(\gamma) \\
 F(\beta \mid \gamma) &= (F(\beta) \mid F(\gamma)) \\
 F((\beta)^*) &= (F(\beta))^* \\
 F(\text{replace}(a, b, \beta)) &= F(\beta)[a := b]
 \end{aligned}$$

- d) Zeigen Sie, dass Ihre Funktion F aus Teilaufgabe c) tatsächlich einen äquivalenten Ausdruck konstruiert, d.h. dass für jeden RERA α gilt:

$$L(F(\alpha)) = L(\alpha).$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Strukturelle Induktion über α :

- $\alpha = \varepsilon$. Dann ist $F(\alpha) = \alpha = \varepsilon$.
- $\alpha = \emptyset$. Dann ist $F(\alpha) = \alpha = \emptyset$.
- $\alpha = a$ für $a \in \Sigma$. Dann ist $F(\alpha) = \alpha = a$.
- $\alpha = \beta\gamma$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 L(F(\alpha)) &= L(F(\beta\gamma)) = L(F(\beta)F(\gamma)) = L(F(\beta)) \circ L(F(\gamma)) \\
 &\stackrel{\text{IH}}{=} L(\beta) \circ L(\gamma) = L(\beta\gamma) = L(\alpha).
 \end{aligned}$$

- $\alpha = (\beta \mid \gamma)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 L(F(\alpha)) &= L(F(\beta \mid \gamma)) = L(F(\beta) \mid F(\gamma)) = L(F(\beta)) \cup L(F(\gamma)) \\
 &\stackrel{\text{IH}}{=} L(\beta) \cup L(\gamma) = L(\beta \mid \gamma) = L(\alpha).
 \end{aligned}$$

- $\alpha = (\beta)^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} L(F(\alpha)) &= L(F((\beta)^*)) = L((F(\beta))^*) = L(F(\beta))^* \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} L(\beta)^* = L((\beta)^*) = L(\alpha). \end{aligned}$$

- $\alpha = \text{replace}(a, b, \beta)$. Dann ist

$$\begin{aligned} L(F(\alpha)) &= L(F(\text{replace}(a, b, \beta))) = L(F(\beta)[a := b]) \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(F(\beta))\} \stackrel{\text{IH}}{=} \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\beta)\} \\ &= L(\text{replace}(a, b, \beta)) = L(\alpha). \end{aligned}$$

FSK6-3 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

(0 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die regulären Sprachen unter diversen Operationen abgeschlossen sind. Wir können dies auch nutzen, um zu zeigen, dass eine Sprache L *nicht* regulär ist. Solche Beweise funktionieren generell wie folgt:

- Nimm an, dass L regulär ist.
- Wende beliebig oft Operationen an, die Regularität erhalten: Komplement, Kleeneschen Abschluss und Vereinigung/Schneiden/Konkatenation mit einer regulären Sprache. Sei L' die so gebildete Sprache.
- Da alle Operationen Regularität erhalten, muss L' auch regulär sein. Ist aber bekannt, dass L' nicht regulär ist, so muss die Annahme, dass L regulär ist, falsch gewesen sein.

Wenden Sie dieses Beweisverfahren in den folgenden Teilaufgaben an.

- Sei $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ und } n + 2 \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Sprache

$$L_2 = \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

nicht regulär ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wenn L_1 regulär ist, dann ist auch

$$L'_1 = \{aa\} \circ L_1 = \{a^p \mid p \geq 3 \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

regulär. Damit ist auch $L'_1 \cup \{aa\} = L_2$ regulär, was ein Widerspruch ist.

b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_3 = \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist keine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist. (Es sind z.B. $\varepsilon, a, aaaa \in L_3$ und $aa, aaa, bb, bab \notin L_3$.) Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Sprache

$$L_4 = \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist (auch für $\Sigma = \{a, b\}$).

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wenn L_3 regulär ist, dann ist auch $L'_3 = L_3 \cup L((a|b)^*b(a|b)^*)$ regulär. L'_3 enthält alle Wörter, die mindestens ein b enthalten, und alle Wörter a^p wobei p keine Primzahl ist. Das Komplement $\overline{L'_3}$, das ebenfalls regulär ist, enthält somit nur Wörter, die kein b enthalten, also Wörter der Form a^k , wobei außerdem k eine Primzahl sein muss. Damit ist aber $\overline{L'_3} = L_4$, was ein Widerspruch ist.

c) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_5 = \Sigma^* \setminus \{a^x b^y c^{x+2} \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ und } y < x\}$$

nicht regulär ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Sprache

$$L_6 = \{a^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wenn L_5 regulär ist, dann sind auch folgende Sprachen regulär:

- $\overline{L_5}$ (Komplement).

- $L'_5 = \overline{L_5} \cap L(a^*c^*) = \{a^x c^{x+2} \mid x > 0\}$ (Schnitt mit regulärer Sprache).
- $L''_5 = \{aa\}L'_5 = \{a^x c^x \mid x > 2\}$ (Konkatenation mit regulärer Sprache).
- $L_6 = L''_5 \cup \{\varepsilon, ac, aacc\}$ (Vereinigung mit regulärer Sprache).

Das ist ein Widerspruch, da L_6 nicht regulär ist.

FSK6-4 Homomorphismen

(0 Punkte)

Gegeben Alphabete Σ und Δ bezeichnen wir eine Abbildung $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ als *Homomorphismus*, wenn sie strukturerhaltend ist, d.h. wenn gilt:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(uv) &= h(u)h(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Für $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir $h(L) = \{h(u) \mid u \in L\}$.

Man kann leicht zeigen, dass für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen h gilt:

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \emptyset \\ h(L_1 \cup L_2) &= h(L_1) \cup h(L_2) \\ h(L_1 \cap L_2) &= h(L_1) \cap h(L_2) \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen h :

$$\begin{aligned} h(L_1 \circ L_2) &= h(L_1) \circ h(L_2) \\ h(L_1^*) &= (h(L_1))^* \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

$$\begin{aligned} h(L_1 \circ L_2) &= h(\{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}) = \{h(uv) \mid u \in L_1, v \in L_2\} \\ &= \{h(u)h(v) \mid u \in L_1, v \in L_2\} = \{h(u) \mid u \in L_1\} \circ \{h(v) \mid v \in L_2\} \\ &= h(\{u \mid u \in L_1\}) \circ h(\{v \mid v \in L_2\}) = h(L_1) \circ h(L_2) \end{aligned}$$

$$h(L_1^*) = h\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_1^i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} h(L_1^i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (h(L_1))^i = (h(L_1))^*$$

- b) Beweisen Sie für alle regulären Sprachen L und Homomorphismen h : Wenn L regulär ist, dann ist auch $h(L)$ regulär.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Da L regulär ist, gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L = L(\alpha)$. Wir konstruieren einen regulären Ausdruck $h(\alpha)$ mit $L(h(\alpha)) = h(L(\alpha))$. Damit folgt, dass $h(L(\alpha)) = h(L)$ regulär ist. Die Konstruktion erfolgt durch strukturelle Induktion über α :

- Für $\alpha = \emptyset$ wähle $h(\alpha) = \emptyset$. Dann ist $L(\alpha) = \emptyset = L(h(\alpha))$.
- Für $\alpha = \varepsilon$ wähle $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Dann ist $L(\alpha) = \{\varepsilon\} = L(h(\alpha))$.
- Für $\alpha = a$ (mit $a \in \Sigma$) wähle $h(\alpha) = h(a)$. Dann ist $h(L(\alpha)) = h(\{a\}) = \{h(a)\} = L(h(\alpha))$.
- Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ wähle $h(\alpha) = h(\alpha_1)h(\alpha_2)$. Dann ist

$$\begin{aligned} h(L(\alpha)) &= h(L(\alpha_1\alpha_2)) = h(L(\alpha_1)L(\alpha_2)) = h(L(\alpha_1))h(L(\alpha_2)) \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} L(h(\alpha_1))L(h(\alpha_2)) = L(h(\alpha_1)h(\alpha_2)) = L(h(\alpha)). \end{aligned}$$

- Für $\alpha = (\alpha_1 \mid \alpha_2)$ wähle $h(\alpha) = (h(\alpha_1) \mid h(\alpha_2))$. Dann ist

$$\begin{aligned} h(L(\alpha)) &= h(L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)) = h(L(\alpha_1)) \cup h(L(\alpha_2)) \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} L(h(\alpha_1)) \cup L(h(\alpha_2)) = L(h(\alpha_1) \mid h(\alpha_2)) = L(h(\alpha)). \end{aligned}$$

- Für $\alpha = \alpha_1^*$ wähle $h(\alpha) = (h(\alpha_1))^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} h(L(\alpha)) &= h(L(\alpha_1^*)) = h((L(\alpha_1))^*) \stackrel{\text{IH}}{=} (h(L(\alpha_1)))^* \\ &= (L(h(\alpha_1)))^* = L((h(\alpha_1))^*) = L(h(\alpha)). \end{aligned}$$

- c) Zeigen Sie, dass über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ die Sprache

$$L = \{a^n b^i c^n d^j \mid n, i, j \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist. Geben Sie dazu einen Homomorphismus h an, sodass $h(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da $h(L)$ bekanntlich nicht regulär ist, kann dann auch L nicht regulär sein.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wir definieren:

$$h(a) = a$$

$$h(b) = \varepsilon$$

$$h(c) = b$$

$$h(d) = \varepsilon$$

$$h(x_1 \dots x_n) = h(x_1) \dots h(x_n) \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \text{ und } x_i \in \Sigma$$

Offensichtlich ist $h(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem ist h auch ein Homomorphismus: per Definition gilt $h(\varepsilon) = \varepsilon$ und $h(uv) = h(u)h(v)$.