Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Keine Abgabe

Lösungsvorschlag zur Übung 0 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Hinweise:

- Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert und es lassen sich keine Bonuspunkte damit erwerben.
- Das Blatt wird in den Übungen 20. April 2023–24. April 2023 besprochen. Lösungen können dort präsentiert werden.

FSK0-1 *Wörter, Sprachen*

a) Sei $\Sigma = \{a, b\}, U = \{aab, baa\}$ und $V = \{aa, bb\}$.
Geben Sie Wörter $u, v, w, x \in \Sigma^*$ an, sodass

- $u \in U^*$ und $u \notin V^*$;

LÖSUNGSVORSCHLAG: $u = aab$ (oder $aabaab, baa, baabaa, \ldots$)

- $v \notin U^*$ und $v \in V^*$;

LÖSUNGSVORSCHLAG: $v = aa$ (oder $aabb, bb, bbaa, \ldots$)

- $w \in U^*$ und $w \in V^*$;

LÖSUNGSVORSCHLAG: $w = aabbaa$ (oder $\varepsilon, aabbaaaabbaa, \ldots$)

- $x \notin U^*$ und $x \notin V^*$.

LÖSUNGSVORSCHLAG: $x = a$ (oder $b, aba, bab, \ldots$)

Hinweis: Für eine Menge von Symbolen S bezeichnen wir mit S^* die Menge aller endlichen Folgen von Symbolen aus S (z.B. $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$).

b) Sei $w = abababab bbbccbaaaaaaabacaabbbbbbaba$.

Geben Sie alle Teilwörter v von w an, auf die **alle** der folgenden Eigenschaften zutreffen:

- $|v| = 4$, die Länge von v ist 4;
- $v[1] = a$, das erste Symbol in v ist a;
- $\#_b(v) > 0$, die Anzahl von Vorkommnissen von b in v ist größer als 0.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Man kann prinzipiell alle Teilwörter anschauen und die richtigen heraussuchen.

Effizienter: Nur an mit a anfangenden Stellen nur Teilwörter der Länge 4 anschauen und bei denen danach darüber nachdenken, ob ein b vorkommt.

Teilwort	Kommentar
$abab$	Mehrmals, reicht einmal aufzuschreiben
$abbb$	ab-Teil damit zuende, danach erstmal keine weiteren a
$aaaa$	Mehrmals, kommt kein b vor
$aaab$	
$aaba$	
$abac$	
$acaa$	Kommt kein b vor
$aabb$	
$abbb$	Erneut, muss nicht aufgeschrieben werden
aba	Hier sind zwar nochmal as, aber das Wort ist zuende/zu kurz

Damit ist die vollständige Liste solcher Teilwörter $abab, abbb, aaab, aaba, abac, aabb$

FSK0-2 ***Äquivalenzrelationen***

Eine Relation zwischen zwei Mengen M, N ist eine Menge $R \subseteq M \times N$ von Paaren bestehend je aus einem Element aus M und einem aus N. M und N können hierbei beliebige Mengen sein. Ist $(p, q) \in R$, so schreibt man auch $R(p, q)$, pRq oder $p \sim_R q$.

Ist klar, um welche Relation es sich handelt, kann man auch $p \sim q$ schreiben.

Eine Relation R heißt Äquivalenzrelation, wenn

- die zugrundeliegenden Mengen gleich sind: $M = N$;
- für alle $x \in M$ gilt $R(x, x)$ (d.h. R ist reflexiv);

- für alle $x, y \in M$ gilt $R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$ (d.h. R ist symmetrisch);
- für alle $x, y, z \in M$ gilt $R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$ (d.h. R ist transitiv).

Eine Äquivalenzklasse K einer Äquivalenzrelation R ist eine maximale Menge von Elementen $u, v, w, \cdots \in M$ sodass alle Elemente von K durch R in Beziehung stehen: uRv, uRw, vRu, vRw, etc. „Maximal" bedeutet, dass es kein Element $x \in M$ gibt, das nicht in K ist, aber mit allen Elementen von K in Beziehung steht. Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beispiel: Die Relation

$$\{(u,v) \mid u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \text{ geteilt durch 3 hat denselben Rest wie } v \text{ geteilt durch 3}\}$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind $\{0,3,6,\ldots\}$, $\{1,4,7,\ldots\}$ und $\{2,5,8,\ldots\}$. Sie hat somit Index 3.

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Berechnen Sie außerdem den Index von mindestens zwei der Äquivalenzrelationen.

a) $R_0 \subset \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ $\quad 0R_01, 2R_03$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Keine Äquivalenzrelation: Es gilt nicht $0R_00$

b) $R_1 \subset \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ $\quad 0R_10, 1R_11, 2R_12$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Äquivalenzrelation; Index 3 ($\{0\}, \{1\}, \{2\}$)

c) $R_2 \subset \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ $\quad 0R_20, 1R_21, 2R_22, 1R_22, 2R_21$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Äquivalenzrelation; Index 2 ($\{0\}, \{1,2\}$)

d) $R_3 = \{(p,q) \mid \text{die Personen } p \text{ und } q \text{ haben das gleiche Geburtsjahr}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG: Äquivalenzrelation, allerdings muss man vorsichtig bei der genauen Definition sein: Geburtsjahr einer Person kann nach Ortszeit und Weltzeit unterschiedlich sein; es ist nicht bei allen Personen bekannt; …

Index: Nimmt man nur lebende Menschen als Personen, dann etwa 120, sonst > 1000000, vielleicht auch idealisiert zu ∞.

e) $R_4 = \{(p,q) \mid \text{man kann von dem Ort } p \text{ mit dem Zug zum Ort } q \text{ fahren}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Diskutabel; Antwort muss zur Begründung passen.

Hinweis: Diese Teilaufgabe soll dazu anregen, darüber nachzudenken, welche Modellierung man im Kopf hat und was sie mit der Realität zu tun hat. Da sie dadurch sehr vage wird, würden wir sie so nicht in der Klausur stellen.

- Äquivalenzrelation: Wenn man mit dem Zug an eine Stelle gefahren ist, muss man wieder zurückfahren können, da dort ja Schienen sind.

  Selbst wenn der Fahrplan eine Einwegstrecke beinhaltet, man kann im Kreis fahren und zurückkommen, die Lok muss ja auch zurückkommen.

  Index ist dann die Anzahl der unabhängigen Streckennetze.
- Keine Äquivalenzrelation:

  Wenn eine Strecke eingestellt werden soll und es nur noch einen letzten Zug in eine Richtung gibt, kann es sein, dass man nicht mit dem Zug zurückfahren kann.

f) $R_5 = \{(u,v) \mid$ die Wörter u und v über dem Alphabet $\{a,b\}$ stimmen in den ersten k Positionen überein, wobei k die Länge des kürzeren Wortes ist$\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Keine Äquivalenzrelation, denn $aa \sim a \sim ab$, aber $aa \not\sim ab$

g) $R_6 = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{N}, p - q \text{ ist durch 11 teilbar}\}$

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Äquivalenzrelation, Index 11:

$$\begin{array}{lclcl}
[0]_{R_6} & = & \{q \mid q \bmod 11 = 0\} & = & \{0, 11, 22, 33, 44, 55, \ldots\}, \\
[1]_{R_6} & = & \{q \mid q \bmod 11 = 1\} & = & \{1, 12, 23, 34, 45, 56, \ldots\}, \\
[2]_{R_6} & = & \{q \mid q \bmod 11 = 2\} & = & \{2, 13, 24, \ldots\}, \\
 & & \vdots & & \\
[10]_{R_6} & = & \{q \mid q \bmod 11 = 10\} & = & \{10, 21, 32, \ldots\}
\end{array}$$

Index 11, da $\mathbb{N} = [0]_{R_6} \dot\cup [1]_{R_6} \dot\cup [2]_{R_6} \dot\cup \ldots \dot\cup [10]_{R_6}$

FSK0-3 ***Induktion***

Betrachte folgende rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf den natürlichen Zahlen:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) & n > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \leq n + 1$.

Hinweis: Für eine rationale Zahl q bezeichnet $\lfloor q \rfloor$ hierbei die größte natürliche Zahl n, sodass $n \leq q$ ($\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ ist also die Abrundungsfunktion).

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wir präsentieren hier zwei Beweisvarianten. Beweisvariante 1:

Induktionsbasis: Wir zeigen, dass die Behauptung für $n = 0$ gilt: $f(0) = 1 \leq 1 = 0 + 1$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für alle $n > 0$ gilt:

Aus „$f(m) \leq m + 1$ gilt für alle $m < n$" folgt auch $f(n) \leq n + 1$:

Modulo 6 kann man das Verhalten der Gaußklammern genau bestimmen, also betrachten wir die Fälle modulo 6.

Fallunterscheidung:

- $n \bmod 6 = 0$: Damit ist aber auch $n \geq 6$, da der Fall $n = 0$ schon behandelt wurde. Damit:

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) = f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{3}\right) \\ &\leq \underbrace{\frac{n}{2} + 1}_{\text{aus I.H.}} + \underbrace{\frac{n}{3} + 1}_{\text{aus I.H.}} \\ &= \frac{5}{6}n + 1 + 1 \leq \frac{5}{6}n + \frac{1}{6}n + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

- $n \bmod 6 = 1$:

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \\ &= f\left(\frac{n-1}{2}\right) + f\left(\frac{n-1}{3}\right) \\ &\leq \underbrace{\frac{n-1}{2} + 1}_{\text{aus I.H.}} + \underbrace{\frac{n-1}{3} + 1}_{\text{aus I.H.}} \\ &= \frac{5n-5}{6} + 2 = \frac{5}{6}(n-1) + 2 \leq n - 1 + 2 = n + 1 \end{aligned}$$

Die restlichen Fälle sind analog. Wir verzichten hier darauf (damit ist dieser Ansatz keine vollständige Lösung). Wir geben stattdessen einen alternativen Beweis an, der kürzer ist

Beweisvariante 2: Für den alternativen Beweis verwenden wir eine stärkere Basis, indem wir mehr Fälle berechnen:

Induktionsbasis: Wir zeigen: Für alle $n < 6$ gilt: $f(n) \leq n+1$.

$f(0) = 1 \leq 1 = 0+1$
$f(1) = f(0) + f(0) = 1+1 = 2 \leq 2 = 1+1$
$f(2) = f(1) + f(0) = 2+1 = 3 \leq 3 = 2+1$
$f(3) = f(1) + f(1) = 2+2 = 4 \leq 4 = 3+1$
$f(4) = f(2) + f(1) = 3+2 = 5 \leq 5 = 4+1$
$f(5) = f(2) + f(1) = 3+2 = 5 \leq 6 = 5+1$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass für alle $n \geq 6$ gilt:
Aus „$f(m) \leq m+1$ gilt für alle $m < n$" folgt auch $f(n) \leq n+1$:

$$\begin{aligned}
f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) \\
&\leq \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}_{\text{aus I.H.}} + \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1}_{\text{aus I.H.}} \\
&\leq \frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{3} + 1 \\
&= \frac{5}{6}n + 1 + 1 \leq \frac{5}{6}n + \frac{1}{6}n + 1 \\
&= n + 1
\end{aligned}$$