Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Lydia Kondylidou

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Keine Abgabe

Übung 13 zur Vorlesung

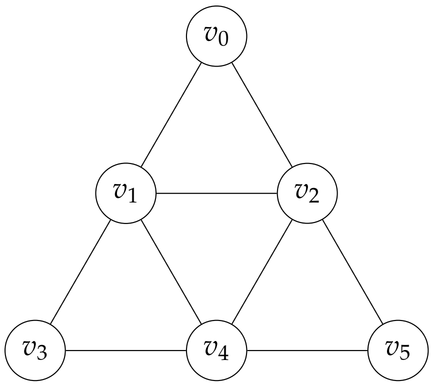
# Formale Sprachen und Komplexität

Dieses Übungsblatt kann aus Zeitgründen nicht mehr abgegeben werden und wird somit auch nicht korrigiert.

**FSK13-1** ***$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von Graphenproblemen*** (0 Punkte)

a) Das Independent-Clique-Problem (ICP) beantwortet für einen Graphen $G$ und eine natürliche Zahl $n$ die Frage, ob es in $G$ eine Clique $C$ der Größe $n$ und ein Independent Set $I$ der Größe $n$ gibt, sodass $|C \cap I| = 1$ gilt.

   i) Der Graph $G$ sei:




   Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in$ ICP gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

   ii) Zeigen Sie, dass ICP $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

b) Ein bunter Graph $G = (V, E, col)$ ist ein ungerichteter Graph $(V, E)$, wobei jeder Knoten $v \in V$ mit einer Farbe $col(v) \in \{\text{blau}, \text{gelb}, \text{rot}\}$ versehen ist. Eine blaue $k$-Clique ist eine $k$-Clique deren Knoten alle blau sind, und entsprechend für gelbe und rote $k$-Cliquen.

   Das Bunte-Cliquen-Problem (BCP) ist:

   | | |
   |---|---|
   | gegeben: | Ein bunter Graph $G = (V, E, col)$ und eine Zahl $k > 0$. |
   | gefragt: | Hat $G$ eine blaue, eine gelbe und eine rote $k$-Clique? |

   Zeigen Sie, dass BCP $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

**FSK13-2** ***SAT-Varianten in $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$*** (0 Punkte)

a) Sei UNSAT = $\{code(F) \mid F$ ist eine widersprüchliche Formel$\}$. Nehmen Sie an, dass UNSAT in $\mathcal{NP}$ ist.

Wir betrachten folgende Reduktionsfunktion von SAT auf UNSAT: Teste alle möglichen Variablenbelegungen der Formel. Wenn eine erfüllende Variablenbelegung gefunden wurde, gib $x \wedge \neg x$ zurück, ansonsten $x$.

Ist diese Reduktionsfunktion geeignet, um zu zeigen, dass UNSAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei 3mal-3SAT = $\left\{ code(F) \,\middle|\, \begin{array}{l} F \text{ ist eine 3-CNF und hat mindestens} \\ 3 \text{ verschiedene erfüllende Belegungen} \end{array} \right\}$.

Zeigen Sie, dass 3mal-3SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist, wobei Sie für den Nachweis der $\mathcal{NP}$-Schwere eine Reduktion von 3-CNF-SAT auf 3mal-3SAT durchführen.

**Hinweis:** Was könnten Sie in der benötigten Reduktionsfunktion $f$ hinzufügen, um aus einer erfüllenden Belegung 3 erfüllende Belegungen zu erzeugen?

c) Sei Pos-3-SAT = $\left\{ code(F) \,\middle|\, \begin{array}{l} F \text{ ist eine 3-CNF, in der ausschließlich} \\ \text{positive Literale vorkommen} \end{array} \right\}$.

i) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{P}$?

ii) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{NP}$?

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

**FSK13-3** ***$\mathcal{NP}$-vollständiges Labyrinth*** (0 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe ein Rätselspiel mit Labyrinthen.

Die Labyrinthe sind an einem Gitter ausgerichtet. Jeweils eine Kachel ist als Start-Kachel gekennzeichnet, eine als Ziel-Kachel. Zwischen je zwei benachbarten Kacheln liegt eine von drei Möglichkeiten vor:

- undurchdringbare Wand
- passierbarer freier Weg
- eine schwarze oder weiße Tür, markiert mit einem Vieleck (3 oder mehr Ecken)

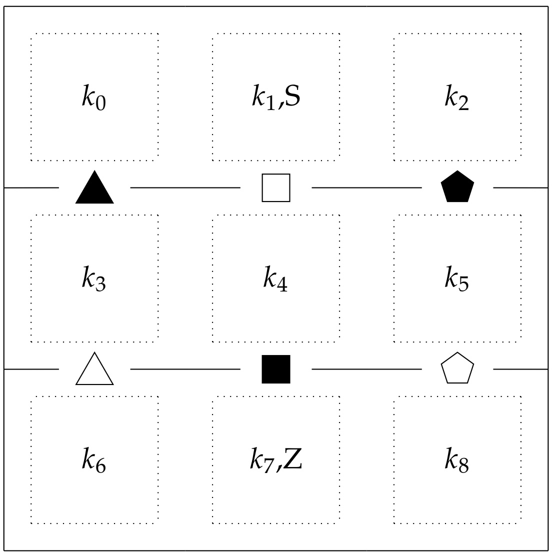
Die Regeln:

- Man muss einen Weg vom Start zum Ziel finden.
- Der Weg besteht aus einer Folge von Kacheln.

- Zwei im Weg aufeinanderfolgende Kacheln müssen benachbart sein (vertikal oder horizontal) und dürfen keine Wand zwischen sich haben.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn im Weg eine schwarze Türe genommen wurde, die mit einem $k$-Eck markiert ist, dann darf keine weiße mit einem $k$-Eck markierte Tür auf dem Weg liegen.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn im Weg eine weiße Türe genommen wurde, die mit einem $k$-Eck markiert ist, dann darf keine schwarze mit einem $k$-Eck markierte Tür auf dem Weg liegen.

a) Betrachten Sie folgendes Labyrinth, wobei S für den Start und Z für das Ziel steht.

Schwarze durchgehende Linien sind undurchdringbare Wände. Unterbrochene Linien stehen für die mit dem Symbol markierte Tür. Gepunktete Linien umranden die einzelnen Kacheln.




Bestimmen Sie alle möglichen Wege, in denen keine Kachel mehrmals genommen wird, um in diesem Labyrinth vom Start zum Ziel zu kommen.

Beschreiben Sie jeweils den Weg, indem Sie die Kachelfolge (die Abfolge der $k_{.}$) angeben.

**Wegbeispiel**: $k_1, k_4, k_7$ ist wegen Benutzung einer weißen, wie auch einer schwarzen Quadrattür kein gültiger Weg. Alle anderen Regeln sind dabei aber eingehalten.

b) Ein Labyrinth nennt man horizontal wandfrei, wenn es zwischen zwei horizontal benachbarten Kacheln immer einen passierbaren freien Weg gibt.

Zeigen Sie, dass die Frage, ob es in einem horizontal wandfreien Labyrinth einen Weg vom Start zum Ziel gibt, $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

**Hinweis:** 3-CNF-SAT ist ein geeignetes Problem für die Reduktion.

c) Zeigen Sie, dass die Frage, ob es in einem beliebigen Labyrinth (das nicht horizontal wandfrei sein muss) einen Weg vom Start zum Ziel gibt, ebenfalls $\mathcal{NP}$-vollständig ist.