Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Lydia Kondylidou

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 5. Juli 2023, 10:00 Uhr

Übung 11 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

FSK11-1 ***μ-Rekursion*** (2 Punkte)

Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und absolute Differenz $\mathit{absdiff}(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ primitiv rekursiv sind. Beachten Sie, dass wir in der Definition von *absdiff* x_1 und x_2 als ganze Zahlen subtrahieren, d.h. $\mathit{absdiff}(3, 4) = \mathit{absdiff}(4, 3) = 1$.

a) Berechnen Sie μg für folgende Funktionen g.

- $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x + 10$
- $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = (x - 3)^2 - 4$
- $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

b) Zeigen Sie, dass die Exponentiationsfunktion

$$\mathit{exp}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \mathit{exp}(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$$

primitiv rekursiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion

$$\mathit{log}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad \mathit{log}(x_1, x_2) = \log_{x_1} x_2$$

μ-rekursiv ist. Beachten Sie, dass der Logarithmus für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$\mathit{log}(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2$$

FSK11-2 ***Entscheidbarkeit und Reduktionen*** (2 Punkte)

a) Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 = \{z \in \{0, 1\}^* \mid \text{TM } M_z \text{ hält für Eingabe 01}\}$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- L_1 ist entscheidbar.

- L_1 ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- L_1 ist weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

Um zu zeigen, dass L_1 (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie kurz die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die L_1 (semi-)entscheidet. Um zu zeigen, dass L_1 nicht (semi-)entscheidbar ist, reduzieren Sie ein geeignetes Problem auf L_1.

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten wie folgt: Wenn eine Sprache L (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die die charakteristische Funktion χ_L bzw. χ'_L berechnet. Wenn L nicht (semi-)entscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch ab.

i) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $A \cap B$ entscheidbar.

ii) Wenn A und $A \cup B$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.

iii) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

iv) Das Problem, ob $L(M) = \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

c) Zeigen Sie, dass das folgende Problem für jede Turingmaschine T und natürliche Zahl n entscheidbar ist.

„T hält auf jeder Eingabe nach höchstens n Schritten.“

FSK11-3 ***Primitiv rekursive Prädikate*** (0 Punkte)

Primitiv rekursive Funktionen, die auf $\{0, 1\}$ abbilden, können auch als Prädikate aufgefasst werden. Wir betrachten in dieser Aufgabe nur einstellige Prädikate p, wobei $p(x) = 0$ bedeutet, dass x die Eigenschaft p nicht besitzt, und $p(x) = 1$ bedeutet, dass x die Eigenschaft p besitzt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion *iszero* ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$iszero(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 > 0 \\ 1 & \text{für } x_1 = 0 \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion *even* ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$even(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } x_1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion *ifnotzero* primitiv rekursiv ist.

$$ifnotzero(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 > 0 \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

d) Zeigen Sie, dass die Funktion *ifthenelse* primitiv rekursiv ist, angenommen dass $p(x)$ ein primitiv rekursives Prädikat ist.

$$ifthenelse(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2 & \text{falls } p(x_1) \\ x_3 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Zeigen Sie, dass, gegeben zwei primitiv rekursive Prädikate p und q, auch die Konjunktion $p \wedge q$ primitiv rekursiv ist.

FSK11-4 ***Satz von Rice*** (0 Punkte)

Sei $T = (Z, \{a, b\}, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ eine Turingmaschine. Welche der folgenden Fragestellungen zu T sind entscheidbar?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit unentscheidbarer Fragestellungen mittels des Satzes von Rice. Bei entscheidbaren Fragestellungen erläutern Sie, wie die charakteristische Funktion berechnet wird.

a) T hat mindestens $|\Gamma|!$ viele Zustände. (! bezeichnet die Fakultätsfunktion.)

b) Leerheitsproblem: Es gibt ein Wort $w \in L(T)$

c) Wenn $a \in L(T)$, dann auch $aa \in L(T)$

d) Wenn es ein Wort $w \in L(T)$ gibt, dann gibt es auch ein Wort u, welches ein b enthält mit $u \in L(T)$