Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Lydia Kondylidou

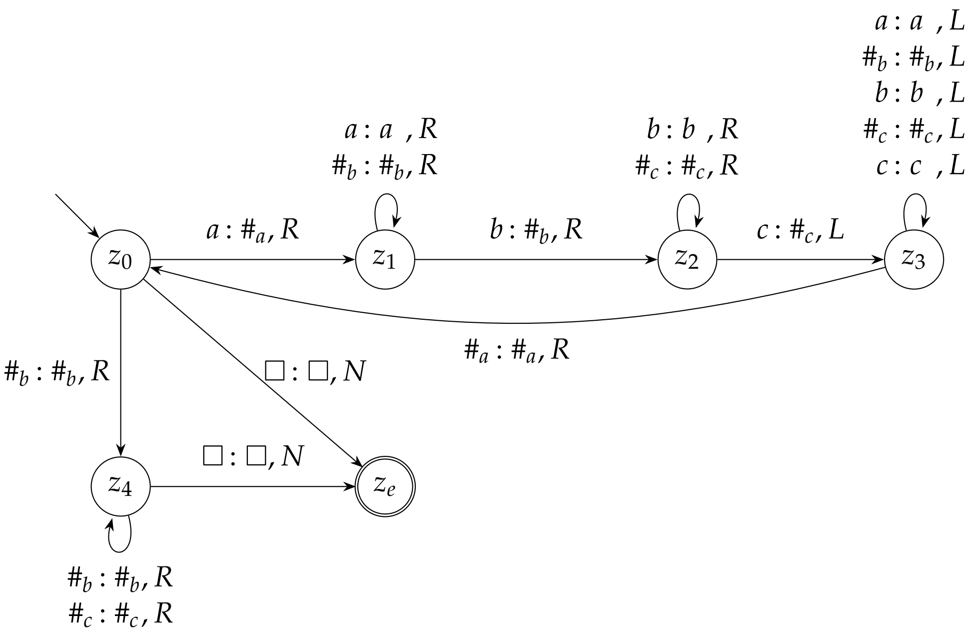
Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 21. Juni 2023, 10:00 Uhr

Übung 9 zur Vorlesung

Formale Sprachen und Komplexität

FSK9-1 ***Turingmaschinen verstehen*** (2 Punkte)

Die folgende DTM[1] T ist als Zustandsgraph gegeben, wobei $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\#_a, \#_b, \#_c, \Box\}$ und $\Box$ das Blank-Symbol ist.



a) Geben Sie Läufe der Turingmaschine (Übergänge von der Startkonfiguration bis zur Endkonfiguration) für die Wörter ε, $abcc$ und abc an.

b) Welche Sprache akzeptiert die Turingmaschine T? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Eine Turingmaschine T mit Alphabet Σ und Bandalphabet Γ berechnet eine (partielle) Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$, wenn für alle $u \in \Sigma^*$ und $v \in \Gamma^*$ gilt: $f(u) = v$ g.d.w. $z_0 u \vdash_T^* \cdots \Box \cdots \Box z_e v \Box \cdots$ mit z_e Endzustand. (Beachten Sie: Diese Definition weicht leicht von der aus der Vorlesung ab, weil die Wertemenge von f nicht Σ^* ist, sondern Γ^*.)

[1] Im Zustandsgraph ist nicht für jeden Zustand z und jedes Zeichen a ein Übergang definiert. Wir betrachten die Übergangsfunktion δ also als partielle Funktion. Wenn $\delta(z, a)$ undefiniert ist, hält die Maschine an und akzeptiert nicht. Das ist angenehmer, als einen Müllzustand einzuführen, um δ total zu machen.

Welche Funktion berechnet T?

d) Bestimmen Sie asymptotisch, also in O-Notation, die Anzahl der Schritte (abhängig von n), die die Turingmaschine braucht, um das Wort $w = a^n b^n c^n$ zu erkennen.

FSK9-2 ***Snapshot-Kellerautomaten*** (2 Punkte)

Ein *Snapshot-Kellerautomat* (Snapshot-PDA) ist ein Kellerautomat mit einem zusätzlichen „Einwegkeller" sowie zwei zusätzlichen Aktionen SPEICHERN und LADEN. Formal ist ein Snapshot-PDA immer noch ein 6-Tupel $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, aber

$$\delta\colon (Z \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}_e(Z \times (\Gamma^* \cup \{\mathsf{SPEICHERN}, \mathsf{LADEN}\}))$$

wobei SPEICHERN und LADEN keine Wörter aus Γ^* sind.

Jedes Mal, wenn die Aktion SPEICHERN ausgeführt wird, wird der aktuelle Kellerinhalt in den Einwegkeller kopiert. Jedes Mal, wenn die Aktion LADEN ausgeführt wird, wird der aktuelle Keller mit dem Inhalt des Einwegkellers überschrieben. Der Einwegkeller wird dabei geleert, also auf # gesetzt.

Eine Konfiguration eines Snapshot-PDA ist ein Quadrupel (z, w, K, T). Dabei ist z der aktuelle Zustand, $w \in \Sigma^*$ das verbleibende Wort, $K \in \Gamma^*$ der Inhalt des Kellers und $T \in \Gamma^*$ der Inhalt des Einwegkellers.

Die Übergangsrelation $\vdash$ eines Snapshot-PDA ist definiert durch:

- $(z, aw, AK, T) \vdash (z', w, WK, T)$ falls $(z', W) \in \delta(z, a, A)$;
- $(z, w, AK, T) \vdash (z', w, WK, T)$ falls $(z', W) \in \delta(z, \varepsilon, A)$;
- $(z, w, K, T) \vdash (z', w, K, K)$ falls $(z', \mathsf{SPEICHERN}) \in \delta(z, \varepsilon, \varepsilon)$;
- $(z, w, K, T) \vdash (z', w, T, \#)$ falls $(z', \mathsf{LADEN}) \in \delta(z, \varepsilon, \varepsilon)$

wobei $z, z' \in Z$; $A \in \Gamma$; $W, K, T \in \Gamma^*$; $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$.

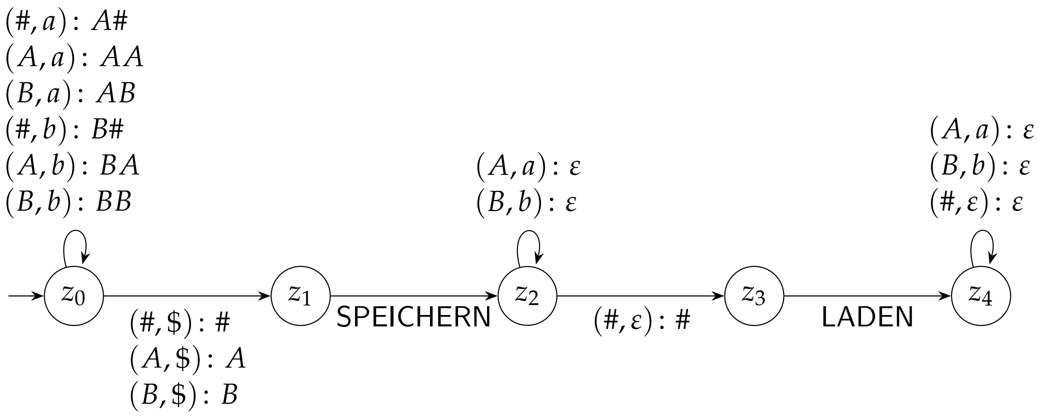
Die Übergangsrelation zeigt, dass die SPEICHERN- und LADEN-Aktionen unabhängig von Kellerinhalt und Resteingabe durchgeführt werden. Daher notieren wir sie im Zustandsgraph als mit SPEICHERN bzw. LADEN beschriftete Pfeile.

Schließlich ist die akzeptierte Sprache eines Snapshot-PDAs M

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \#, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon, T) \text{ für } z \in Z, T \in \Gamma^*\}.$$

Der Automat akzeptiert also mit leerem Keller, wobei der Inhalt des Einwegkellers keine Rolle spielt.

Betrachten Sie nun den folgenden Snapshot-PDA S über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, \$\}$.



a) Welche Sprache erkennt S? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Betrachten Sie den Automaten S', der entsteht, wenn wir S wie folgt ändern.

- Entferne den Zustand z_3 und seine Übergänge.
- Füge einen LADEN-Übergang von z_2 nach z_4 hinzu.

Erkennt S' dieselbe Sprache wie S? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie den Zustandsgraphen eines Snapshot-PDA an, der die Sprache $L = \{ba^{2k}ba^kca^{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ akzeptiert.

Erläutern Sie, wie Ihr Automat funktioniert. Welche Aufgaben übernehmen die Zustände, der Kellerinhalt und der Einwegkeller?

(Nebenbei: Wir wissen durch FSK7-2a, dass L nicht kontextfrei ist. Somit sind Snapshot-PDAs mächtiger als normale PDAs.)

FSK9-3 ***Gummibandturingmaschinen*** (0 Punkte)

Eine Turingmaschine mit flexiblem Band ist eine deterministische Turingmaschine mit zwei zusätzlichen Bandbewegungsoperationen (also zusätzlich zu L, N, R):

- Copy: Kopiert eine Bandzelle, d.h. das Band wird an der Stelle um 1 verlängert, auf beiden Zellen ist danach das gleiche Symbol und der Kopf ist dann auf der linken dieser beiden Zellen
- Delete: Löscht eine Bandzelle, d.h. das Band wird an der Stelle um 1 verkürzt, das Symbol also komplett gelöscht; die Turingmaschine ist danach auf der Bandzelle, die vor dem Löschen rechts von dieser Zelle war

Zeigen Sie: Turingmaschinen mit flexiblen Band akzeptieren genau die gleichen Sprachen wie normale Turingmaschinen.

Formal definieren wir Turingmaschinen mit flexiblen Band analog zu den Definitionen 6.2.1 bis 6.2.5 aus dem Skript mit folgenden Anpassungen:

- Der Typ der Zustandsüberführungsfunktion δ ist nun:

$$\delta\colon (Z \times \Gamma) \to (Z \times \Gamma \times \{L, R, N, \text{Copy}, \text{Delete}\})$$

- Zur Definition der Übergangsrelation $\vdash_M$ werden folgende Fälle hinzugefügt:

$$\begin{aligned}
b_1 \dots b_m\, z\, a_1 \dots a_n \vdash_M b_1 \dots b_m\, z' c c\, a_2 \dots a_n, &\quad \text{wenn } \delta(z, a_1) = (z', c, \text{Copy}),\\
&\quad m \geq 0, n \geq 1, z \notin E\\
b_1 \dots b_m\, z\, a_1 \dots a_n \vdash_M b_1 \dots b_m\, z'\, a_2 \dots a_n, &\quad \text{wenn } \delta(z, a_1) = (z', c, \text{Delete}),\\
&\quad m \geq 0, n \geq 2, z \notin E\\
b_1 \dots b_m\, z\, a_1 \vdash_M b_1 \dots b_m\, z'\, \square, &\quad \text{wenn } \delta(z, a_1) = (z', c, \text{Delete}),\\
&\quad m \geq 0, z \notin E
\end{aligned}$$

Sie sollen nun die folgenden Aussagen zeigen:

- Für jede Turingmaschine (ohne Anpassungen) M existiert eine Turingmaschine mit flexiblen Band M', sodass $L(M) = L(M')$ und
- für jede Turingmaschine mit flexiblen Band M' existiert eine Turingmaschine (ohne Anpassungen) M, sodass $L(M') = L(M)$.