Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 31. Mai 2023, 10:00 Uhr

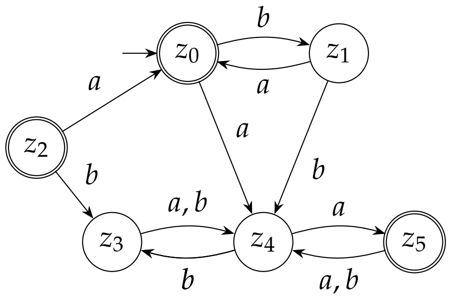
Übung 6 zur Vorlesung

Formale Sprachen und Komplexität

FSK6-1 ***Automaten minimieren*** (2 Punkte)

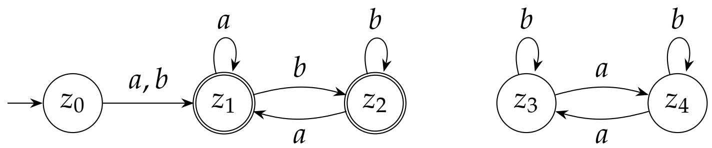
a) Minimieren Sie den DFA A mit dem Verfahren aus der Vorlesung (Algorithmus 4 im Vorlesungsskript). Geben Sie die Minimierungstabelle und den Minimalautomaten (als Zustandsgraph) an.

A:



b) Berechnen Sie den Äquivalenzklassenautomat B' zum DFA B mit dem Verfahren aus der Vorlesung, *ohne* dabei die von z_0 aus unerreichbaren Zustände zu entfernen. Geben Sie die Minimierungstabelle und B' (als Zustandsgraph) an.

B:



c) Ist der DFA B' minimal? Falls nein, wie kann man ihn minimieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

FSK6-2 ***Konservative Erweiterungen regulärer Ausdrücke II*** (2 Punkte)

Für Wörter w über $\Sigma \supseteq \{a, b\}$ sei $\text{replace}(a, b, w)$ das Wort, das aus w entsteht, indem alle a durch b ersetzt werden. Formal definieren wir rekursiv:

$$\begin{aligned} \text{replace}(a, b, \varepsilon) &= \varepsilon \\ \text{replace}(a, b, aw) &= b \cdot \text{replace}(a, b, w) \\ \text{replace}(a, b, cw) &= c \cdot \text{replace}(a, b, w) \quad (c \neq a) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun *replace-erweiterte reguläre Ausdrücke* (RERAs) über Σ, die wie folgt definiert sind:

- $\emptyset$, ε und a (für $a \in \Sigma$) sind replace-erweiterte reguläre Ausdrücke.
- Wenn α und β replace-erweiterte reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch $\alpha\beta$, $(\alpha \mid \beta)$ und $(\alpha)^*$ replace-erweiterte reguläre Ausdrücke.
- Wenn $a, b \in \Sigma$ und α ein replace-erweiterter regulärer Ausdruck ist, dann ist auch $\text{replace}(a, b, \alpha)$ ein replace-erweiterter regulärer Ausdruck.

Die Semantik sei wie bei regulären Ausdrücken definiert:

$$\begin{array}{lll} L(\emptyset) = \emptyset & L(\varepsilon) = \{\varepsilon\} & L(a) = \{a\} \\ L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) & L((\alpha_1 \mid \alpha_2)) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) & L((\alpha)^*) = L(\alpha)^* \end{array}$$

mit der Erweiterung

$$L(\text{replace}(a, b, \alpha)) = \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.$$

Wir zeigen in den folgenden Teilaufgaben, dass die Erweiterung regulärer Ausdrücke mit dem replace-Operator konservativ ist, d.h. dass die RERAs genau die regulären Sprachen erzeugen.

a) Definieren Sie für jeden (nicht-erweiterten) regulären Ausdruck α einen regulären Ausdruck $\alpha[a := b]$, der identisch zu α ist außer dass jeder Teilausdruck $a \in \Sigma$ durch $b \in \Sigma$ ersetzt wird. Beispiel: $(abc)^*[a := b] = (bbc)^*$.

b) Beweisen Sie, dass für Ihre Funktion aus Teilaufgabe a) und für jeden regulären Ausdruck α gilt:

$$L(\alpha[a := b]) = \{\text{replace}(a, b, w) \mid w \in L(\alpha)\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie strukturelle Induktion über α.

c) Nutzen Sie die Funktion aus Teilaufgabe a), um eine Funktion F zu definieren, die jeden RERA α in einen äquivalenten *nicht-erweiterten* regulären Ausdruck $F(\alpha)$ übersetzt.

d) Zeigen Sie, dass Ihre Funktion F aus Teilaufgabe c) tatsächlich einen äquivalenten Ausdruck konstruiert, d.h. dass für jeden RERA α gilt:

$$L(F(\alpha)) = L(\alpha).$$

FSK6-3 ***Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen*** (0 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die regulären Sprachen unter diversen Operationen abgeschlossen sind. Wir können dies auch nutzen, um zu zeigen, dass eine Sprache L *nicht* regulär ist. Solche Beweise funktionieren generell wie folgt:

a) Nimm an, dass L regulär ist.

b) Wende beliebig oft Operationen an, die Regularität erhalten: Komplement, Kleeneschen Abschluss und Vereinigung/Schneiden/Konkatenation mit einer regulären Sprache. Sei L' die so gebildete Sprache.

c) Da alle Operationen Regularität erhalten, muss L' auch regulär sein. Ist aber bekannt, dass L' nicht regulär ist, so muss die Annahme, dass L regulär ist, falsch gewesen sein.

Wenden Sie dieses Beweisverfahren in den folgenden Teilaufgaben an.

a) Sei $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ und } n+2 \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Sprache

$$L_2 = \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

nicht regulär ist.

b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_3 = \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist keine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist. (Es sind z.B. $\varepsilon, a, aaaa \in L_3$ und $aa, aaa, bb, bab \notin L_3$.) Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Sprache

$$L_4 = \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ und } p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

nicht regulär ist (auch für $\Sigma = \{a, b\}$).

c) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_5 = \Sigma^* \setminus \{a^x b^y c^{x+2} \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ und } y < x\}$$

nicht regulär ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Sprache

$$L_6 = \{a^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

FSK6-4 ***Homomorphismen*** (0 Punkte)

Gegeben Alphabete Σ und Δ bezeichnen wir eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ als *Homomorphismus*, wenn sie strukturerhaltend ist, d.h. wenn gilt:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(uv) &= h(u)h(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Für $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir $h(L) = \{h(u) \mid u \in L\}$.

Man kann leicht zeigen, dass für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen h gilt:

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= \emptyset \\ h(L_1 \cup L_2) &= h(L_1) \cup h(L_2) \\ h(L_1 \cap L_2) &= h(L_1) \cap h(L_2) \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie für alle Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und Homomorphismen h:

$$\begin{aligned} h(L_1 \circ L_2) &= h(L_1) \circ h(L_2) \\ h(L_1^*) &= (h(L_1))^* \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie für alle regulären Sprachen L und Homomorphismen h: Wenn L regulär ist, dann ist auch $h(L)$ regulär.

c) Zeigen Sie, dass über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ die Sprache

$$L = \{a^n b^i c^n d^j \mid n, i, j \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist. Geben Sie dazu einen Homomorphismus h an, sodass $h(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da $h(L)$ bekanntlich nicht regulär ist, kann dann auch L nicht regulär sein.