Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 24. Mai 2023, 10:00 Uhr

Übung 5 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

FSK5-1 ***Pumping-Lemma*** (2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen über $\{a, b, c\}$ an, ob diese regulär oder nicht regulär sind, und beweisen Sie, dass Ihre Antwort stimmt.

Um zu beweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist, verwenden Sie das Pumping-Lemma. Um zu beweisen, dass eine Sprache regulär ist, genügt es, ein Konstrukt K anzugeben, das die Sprache erzeugt/erkennt. Sie müssen nicht beweisen, dass $L(K) = L$ ist.

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$

b) $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

c) $M = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

d) $N = \{a^{3k+2} \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$

e) $Q = \{a^{(k+2)!} \mid k \in \mathbb{N}\}$

f) $R = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

FSK5-2 ***Myhill und Nerode*** (2 Punkte)

a) Sei $L = L(ab^*cb^*a)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie eine kompakte Beschreibung der Äquivalenzklasse der Nerode-Relation von L an, in der das Wort $u = abc$ liegt.

b) Sei $L = \{a^i b^j a^i \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine kompakte Beschreibung der Äquivalenzklasse der Nerode-Relation von L an, in der das Wort $u = aaabaa$ liegt.

c) Bestimmen Sie den Nerode-Index folgender Sprachen und entscheiden Sie mit dem Satz von Myhill und Nerode, welche dieser Sprachen regulär sind. Geben Sie für jede Sprache mit endlichem Nerode-Index alle paarweise disjunkten Äquivalenzklassen an (1 Repräsentant pro Klasse).

- $\{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$

- $\{a^{3n+2} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ mit $\Sigma = \{a\}$
- $\{w\overline{w} \mid w \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$
- $\{w^i \mid i \in \mathbb{N}, w \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$

FSK5-3 ***Konservative Erweiterungen regulärer Ausdrücke*** (0 Punkte)

In dieser Aufgabe geht es um Erweiterungen regulärer Ausdrücke mit zusätzlichen Operatoren. Geben Sie für jede Erweiterung an, ob sie konservativ ist, und beweisen Sie Ihre Antwort. Eine Erweiterung ist konservativ, wenn die erweiterten regulären Ausdrücke nur reguläre Sprachen beschreiben.

Im Folgenden seien $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ reguläre Ausdrücke.

a) $\alpha?$: Teilwörter, die von α erkannt werden, dürfen vorkommen, müssen aber nicht. Die Semantik von $\alpha?$ ist also $L(\alpha?) = \{\varepsilon\} \cup L(\alpha)$.

b) α^+: wie α^*, aber α muss mindestens einmal vorkommen.

$L(\alpha^+) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} L(\alpha)^i = L(\alpha) \cup L(\alpha)^2 \cup L(\alpha)^3 \cup \cdots$

c) $\alpha^{\{i,j\}}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und $i \leq j$: wie α^*, aber α muss mindestens i-mal und darf höchstens j-mal wiederholt werden.

$L(\alpha^{\{i,j\}}) = \bigcup_{k=i}^{j} L(\alpha)^k = L(\alpha)^i \cup L(\alpha)^{i+1} \cup L(\alpha)^{i+2} \cup \cdots \cup L(\alpha)^j$

d) $s(\alpha)$ („Shuffle-Operator“): die Buchstaben von α dürfen in beliebiger Reihenfolge auftauchen.

$L(s(\alpha)) = \{w \mid \exists v \in L(\alpha).\ \forall a \in \Sigma.\ \#_a(v) = \#_a(w)\}$

Beispiel: $L(s(aab)) = \{aab, aba, baa\}$.

FSK5-4 ***Produktautomat*** (0 Punkte)

Als Produktautomat bezeichnet man einen DFA $C = (Z_C, \Sigma, \delta_C, z_{0C}, E_C)$, der aus zwei DFAs $A = (Z_A, \Sigma, \delta_A, z_{0A}, E_A)$ und $B = (Z_B, \Sigma, \delta_B, z_{0B}, E_B)$ gebildet wird, wobei

- $Z_C = Z_A \times Z_B$
- $z_{0C} = (z_{0A}, z_{0B})$
- $\delta_C((p, q), a) = (\delta_A(p, a), \delta_B(q, a))$.

Die Menge der Endzustände E_C werden wir in den folgenden Teilaufgaben unterschiedlich definieren.

a) Ein Automat X *simuliert* einen Automaten Y, wenn es eine Simulationsfunktion $f : Z_X \to Z_Y$ gibt, sodass für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: Endet der Lauf von X auf w im Zustand z, so endet der Lauf von Y auf w im Zustand $f(z)$.

   Zeigen Sie, dass C sowohl A als auch B simuliert.

b) Bestimmen Sie eine Menge I, sodass mit $E_C = I$ gilt: $L(C) = L(A)$.

c) Bestimmen Sie eine Menge J, sodass mit $E_C = J$ gilt: $L(C) = L(A) \triangle L(B)$. Hierbei ist $M \triangle N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$ die „symmetrische Differenz" von M und N.