

Übung 1 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

FSK1-1 Operationen auf Formalen Sprachen

(2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Seien L_1 und L_2 formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, sodass alle Wörter in L_1 eine gerade Anzahl an a 's haben und alle Wörter in L_2 eine gerade Anzahl an b 's haben. Dann haben alle Wörter in $L_1 \cup L_2$ eine gerade Anzahl an a 's und eine gerade Anzahl an b 's.
- Sei die formale Sprache L definiert als $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}$.
Dann gilt $L \cap \{a\}^* = \{\}$.
- Sei L eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die alle Wörter aus Σ^* enthält, deren Wortlänge kleiner als 1000 ist (d.h. $w \in L$ gilt genau dann wenn $w \in \Sigma^*$ und $|w| < 1000$). Dann ist L eine endliche Sprache.
- Sei L eine formale Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die nur Wörter mit dreimal sovielen b 's wie a 's enthält, d.h. für alle $w \in L$ gilt $\#_b(w) = 3 \cdot \#_a(w)$.
Dann enthält L^* ebenfalls nur Wörter, die dreimal soviele b 's wie a 's enthalten.

FSK1-2 Grammatiken angeben

(2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie jeweils eine Grammatik G_i an, sodass $L(G_i)$ die Sprache L_i über Σ erzeugt. Verwenden Sie keine ε -Produktionen.¹ Erläutern Sie, warum $L(G_i) = L_i$ gilt, indem Sie die „Aufgabe“ der einzelnen Variablen und Produktionen erläutern. Geben Sie außerdem jeweils den Typ Ihrer Grammatik an (mit Begründung).

- $L_1 = \{aba, abba, abbabababa\}$
- $L_2 = \{a\}^+$
- $L_3 = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j > 0\}$.

¹Eine ε -Produktion ist eine Produktion, deren rechte Seite aus dem leeren Wort besteht.

FSK1-3 Spracheigenschaft per Induktion beweisen

(0 Punkte)

Die Grammatik G sei definiert durch $G = (A, \{a, b\}, \{A \rightarrow AA, A \rightarrow aAbb, A \rightarrow bab\}, A)$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$w \in L(G) \implies \#_b(w) = 2 \cdot \#_a(w)$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion über die Länge der Linksableitung von w .

FSK1-4 Klammersprache

(0 Punkte)

Die Grammatik G sei definiert durch $G = (\{S, A, B\}, \{(\cdot), [\cdot]\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \rightarrow (S), S \rightarrow [S], S \rightarrow A, S \rightarrow B, A \rightarrow (), A \rightarrow [], B \rightarrow S, B \rightarrow BB\}.$$

- Von welchem Typ ist die Grammatik G ?
- Stellen Sie für folgende Zeichenketten fest, ob sie Wörter in $L(G)$ sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Bei Wörtern, die in $L(G)$ sind, geben Sie eine Ableitung an.
 - $()[[()]]$
 - $[[BA]]$
 - $()[[[]]]$
 - $[(())()]$
 - $(([[[]]]))$
- Geben Sie vier verschiedene Wörter aus $L(G)$ an, die nicht in Teilaufgabe b) vorkommen.
- Geben Sie 4 verschiedene Wörter aus $\{[\cdot], (\cdot)\}^*$ an, die nicht in $L(G)$ liegen und die nicht in Teilaufgabe b) vorkommen.
- Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ in natürlicher Sprache möglichst kurz und genau.