Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Keine Abgabe

Übung 0 zur Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Hinweise:

- Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert und es lassen sich keine Bonuspunkte damit erwerben.
- Das Blatt wird in den Übungen 20. April 2023–24. April 2023 besprochen. Lösungen können dort präsentiert werden.

FSK0-1 *Wörter, Sprachen*

a) Sei $\Sigma = \{a, b\}, U = \{aab, baa\}$ und $V = \{aa, bb\}$.

Geben Sie Wörter $u, v, w, x \in \Sigma^*$ an, sodass

- $u \in U^*$ und $u \notin V^*$;
- $v \notin U^*$ und $v \in V^*$;
- $w \in U^*$ und $w \in V^*$;
- $x \notin U^*$ und $x \notin V^*$.

Hinweis: Für eine Menge von Symbolen S bezeichnen wir mit S^* die Menge aller endlichen Folgen von Symbolen aus S (z.B. $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$).

b) Sei $w = ababababbbbccbaaaaaaabacaabbbbbbaba$.

Geben Sie alle Teilwörter v von w an, auf die **alle** der folgenden Eigenschaften zutreffen:

- $|v| = 4$, die Länge von v ist 4;
- $v[1] = a$, das erste Symbol in v ist a;
- $\#_b(v) > 0$, die Anzahl von Vorkommnissen von b in v ist größer als 0.

FSK0-2 ***Äquivalenzrelationen***

Eine Relation zwischen zwei Mengen M, N ist eine Menge $R \subseteq M \times N$ von Paaren bestehend je aus einem Element aus M und einem aus N. M und N können hierbei beliebige Mengen sein. Ist $(p, q) \in R$, so schreibt man auch $R(p, q)$, pRq oder $p \sim_R q$.

Ist klar, um welche Relation es sich handelt, kann man auch $p \sim q$ schreiben.

Eine Relation R heißt Äquivalenzrelation, wenn

- die zugrundeliegenden Mengen gleich sind: $M = N$;
- für alle $x \in M$ gilt $R(x, x)$ (d.h. R ist reflexiv);
- für alle $x, y \in M$ gilt $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$ (d.h. R ist symmetrisch);
- für alle $x, y, z \in M$ gilt $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ (d.h. R ist transitiv).

Eine Äquivalenzklasse K einer Äquivalenzrelation R ist eine maximale Menge von Elementen $u, v, w, \cdots \in M$ sodass alle Elemente von K durch R in Beziehung stehen: uRv, uRw, vRu, vRw, etc. „Maximal" bedeutet, dass es kein Element $x \in M$ gibt, das nicht in K ist, aber mit allen Elementen von K in Beziehung steht. Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beispiel: Die Relation

$$\{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \text{ geteilt durch 3 hat denselben Rest wie } v \text{ geteilt durch 3}\}$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind $\{0, 3, 6, \dots\}$, $\{1, 4, 7, \dots\}$ und $\{2, 5, 8, \dots\}$. Sie hat somit Index 3.

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Berechnen Sie außerdem den Index von mindestens zwei der Äquivalenzrelationen.

a) $R_0 \subset \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\} \qquad 0R_01, 2R_03$

b) $R_1 \subset \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \qquad 0R_10, 1R_11, 2R_12$

c) $R_2 \subset \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \qquad 0R_20, 1R_21, 2R_22, 1R_22, 2R_21$

d) $R_3 = \{(p, q) \mid \text{die Personen } p \text{ und } q \text{ haben das gleiche Geburtsjahr}\}$

e) $R_4 = \{(p, q) \mid \text{man kann von dem Ort } p \text{ mit dem Zug zum Ort } q \text{ fahren}\}$

f) $R_5 = \{(u, v) \mid$ die Wörter u und v über dem Alphabet $\{a, b\}$ stimmen in den ersten k Positionen überein, wobei k die Länge des kürzeren Wortes ist$\}$

g) $R_6 = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{N}, p - q \text{ ist durch 11 teilbar}\}$

FSK0-3 ***Induktion***

Betrachte folgende rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf den natürlichen Zahlen:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) & n > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \leq n + 1$.

Hinweis: Für eine rationale Zahl q bezeichnet $\lfloor q \rfloor$ hierbei die größte natürliche Zahl n, sodass $n \leq q$ ($\lfloor \cdot \rfloor\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ ist also die Abrundungsfunktion).