Wiederholung und Fragestunde

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 18. Juli 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Inhaltsübersicht

Teil I: Formale Sprachen und Automatentheorie

- Chomsky-Grammatiken und die Chomsky-Hierarchie
- Reguläre Sprachen: DFAs, NFAs, reguläre Ausdrücke, Äquivalenz der Formalismen, Pumping-Lemma, Satz von Myhill und Nerode, Minimierung von DFAs, Abschlusseigenschaften, Entscheidbarkeitsresultate
- Kontextfreie Sprachen: Chomsky-Normalform, Greibach-Normalform, Pumping-Lemma, CYK-Algorithmus, Kellerautomaten (PDA und DPDA), Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeitsresultate
- Kontextsensitive und Typ 0-Sprachen: Kuroda-Normalform, Turingmaschinen (DTM und NTM), LBAs, Abschlusseigenschaften

Blau: Nur FSK

Inhaltsübersicht

Teil II: Berechenbarkeitstheorie

- Berechenbarkeit
- Turingmaschinen und Turingberechenbarkeit
- LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme und -Berechenbarkeit
- Primitiv-rekursive und μ-rekursive Funktionen
- Unentscheidbarkeit: Halteproblem
- Reduktionen, PCP, Satz von Rice

Blau: Nur FSK

Inhaltsübersicht

Teil III: Komplexitätstheorie

- $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$
- NP-Vollständigkeit
- Polynomialzeitreduktionen
- Satz von Cook
- NP-vollständige Probleme

Klassiker: „Rechenaufgaben“

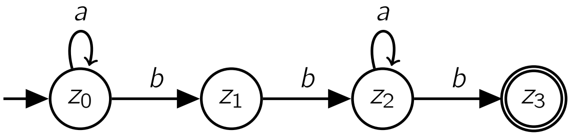
- Automat angeben
- Transformation NFA in DFA mit Potenzmengenkonstruktion
- Minimierung von DFAs
- CYK-Algorithmus ausführen

Beispielaufgabe zu Automat angeben

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.

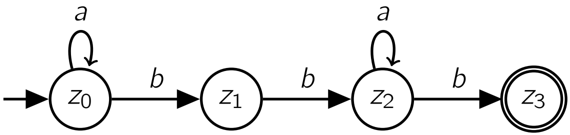
Beispielaufgabe zu Automat angeben

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.



Beispielaufgabe zu Automat angeben

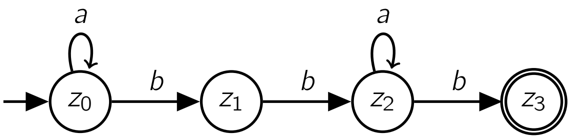
Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.



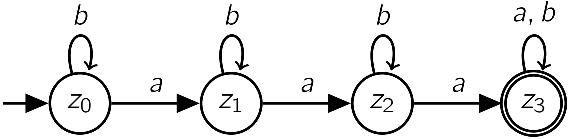
Geben Sie einen DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{w \mid \#_a(w) > 2\}$ erkennt.

Beispielaufgabe zu Automat angeben

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.

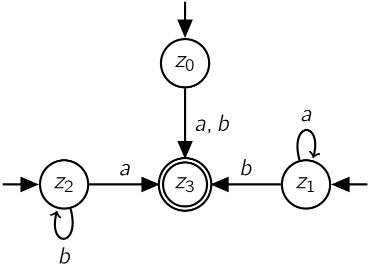


Geben Sie einen DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{w \mid \#_a(w) > 2\}$ erkennt.



Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

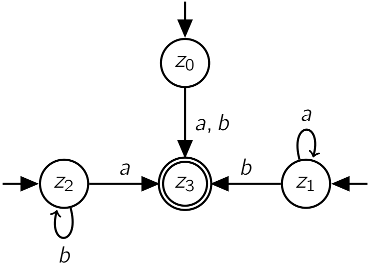
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?
b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.
c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).
d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

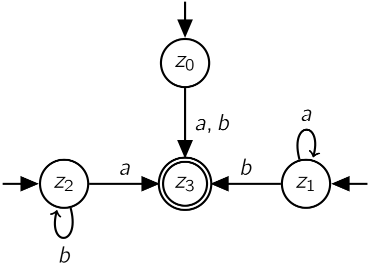
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

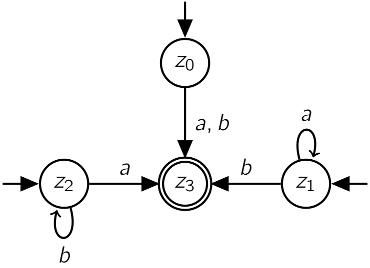


a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

$$\begin{aligned} L &= \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \\ &= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \end{aligned}$$

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



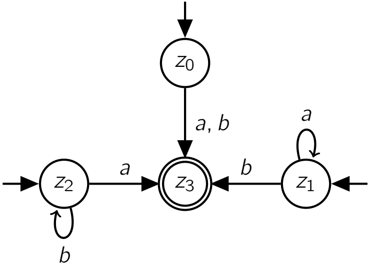
a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

$$
\begin{aligned}
L &= \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \\
&= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}
\end{aligned}
$$

b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

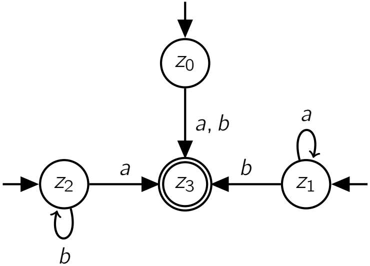
$$\begin{aligned} L &= \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \\ &= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \end{aligned}$$

b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.

$L = L(\alpha)$ mit $\alpha = (a^* b \mid b^* a)$

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

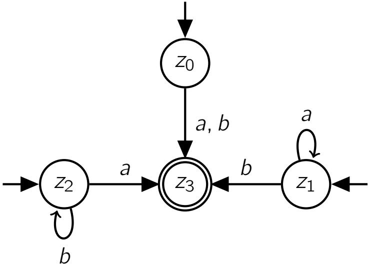
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

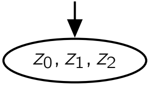


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

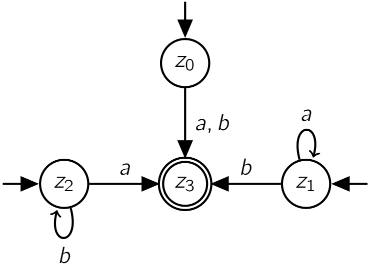


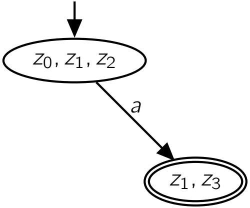


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

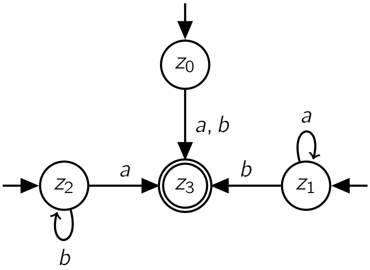


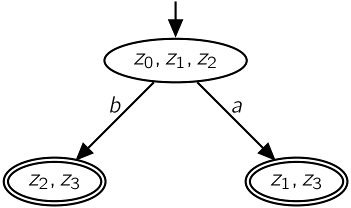


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

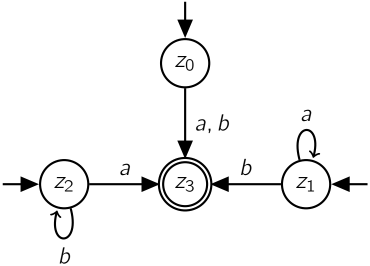


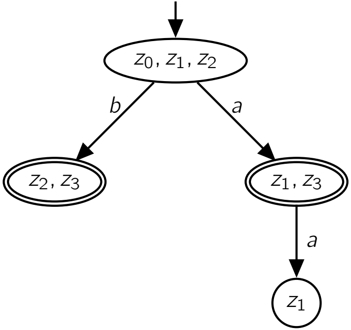


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

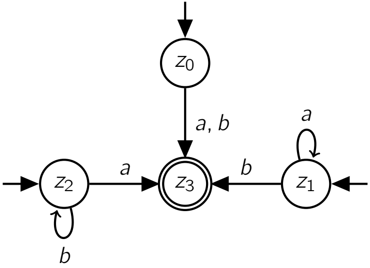


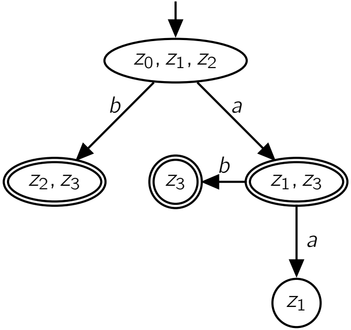


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

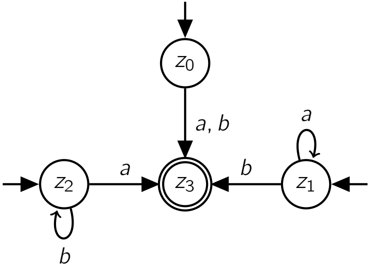


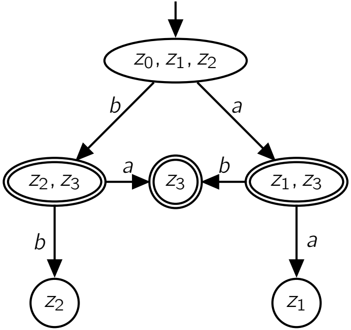


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

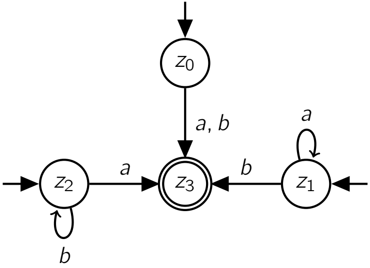


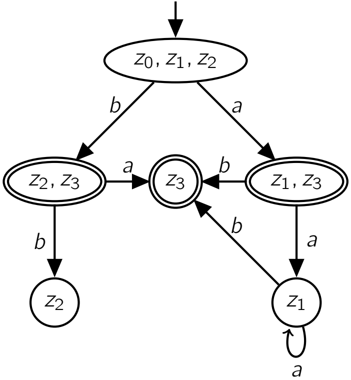


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

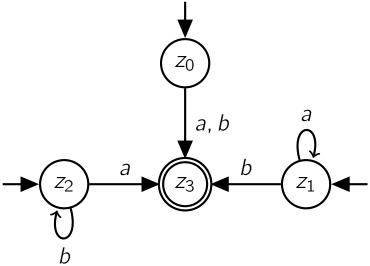


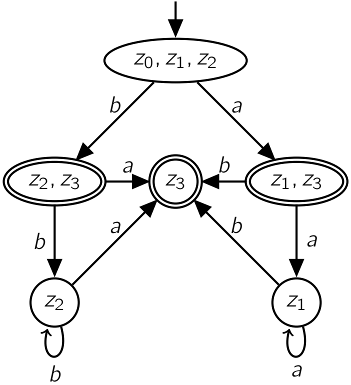


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

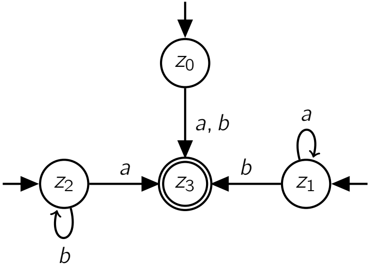


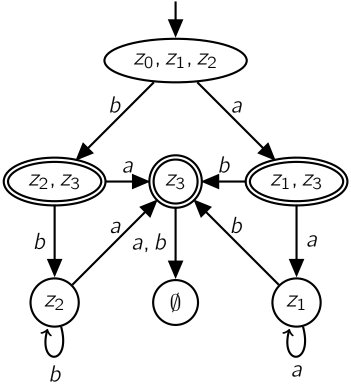


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

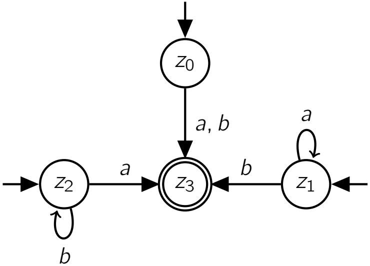


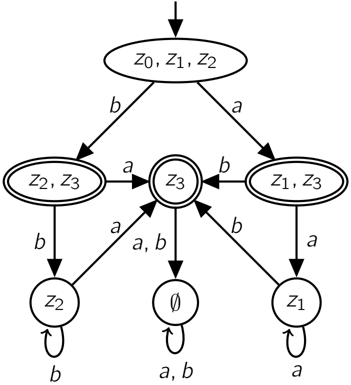


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

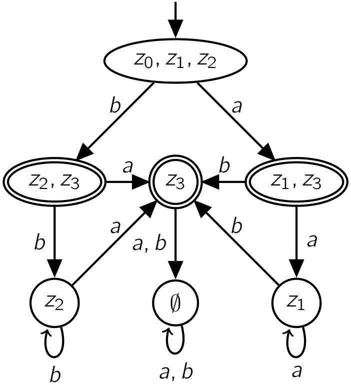




c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus)

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

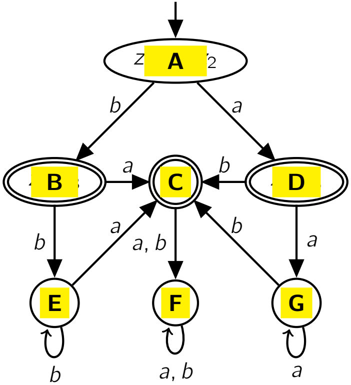
Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

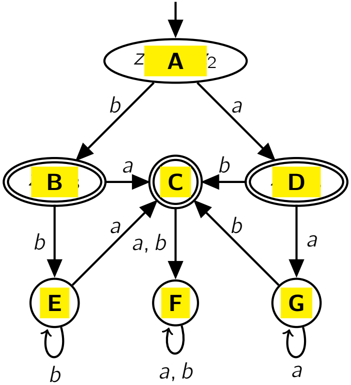
Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

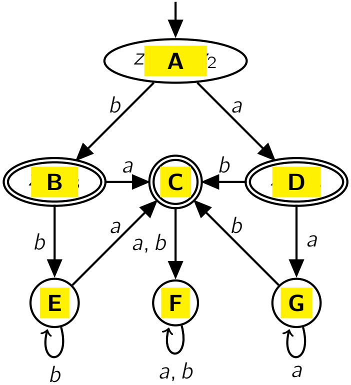


B						
C						
D						
E						
F						
G						
	A	B	C	D	E	F

d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

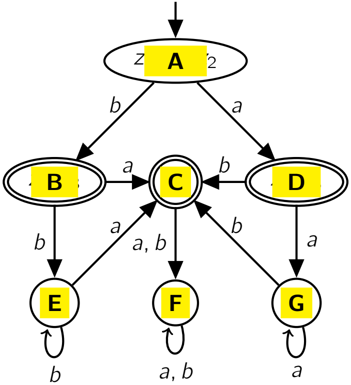


B	$\times_1$					
C	$\times_1$					
D	$\times_1$					
E		$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$		
F		$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$		
G		$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$		
	A	B	C	D	E	F

d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

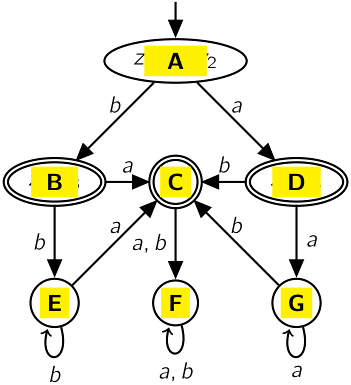


B	$\times_1$					
C	$\times_1$	$\times_2$				
D	$\times_1$	$\times_2$	$\times_2$			
E	$\times_2$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$		
F	$\times_2$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_2$	
G	$\times_2$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_2$	$\times_2$
	A	B	C	D	E	F

d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



B	$\times_1$					
C	$\times_1$	$\times_2$				
D	$\times_1$	$\times_2$	$\times_2$			
E	$\times_2$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$		
F	$\times_2$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_2$	
G	$\times_2$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_1$	$\times_2$	$\times_2$
	A	B	C	D	E	F

Alle Paare nicht äquivalent,
Automat war schon minimal!

d) Minimieren Sie den DFA (Rechenweg erforderlich (Tabelle)).

CYK

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to CS \mid b, A \to a, B \to b, C \to AC \mid b\}$

Führe den CYK-Algorithmus für *aaaaab* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

CYK

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$

Führe den CYK-Algorithmus für *aaaaab* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B,C,S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

CYK

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$

Führe den CYK-Algorithmus für *aaaaab* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

	a	a	a	a	a	b
	1	2	3	4	5	6
1	A	A	A	A	A	B,C,S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

Da unten links nicht das Startsymbol S in der Tabelle steht, liegt das Wort nicht in $L(G)$

CYK

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow CS \mid b, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow AC \mid b\}$

Führe den CYK-Algorithmus für *aaaaabb* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

CYK

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to CS \mid b, A \to a, B \to b, C \to AC \mid b\}$

Führe den CYK-Algorithmus für *aaaaabb* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

	a	a	a	a	a	b	b
	1	2	3	4	5	6	7
1	A	A	A	A	A	B,C,S	B,C,S
2					C	S	
3				C	S		
4			C	S			
5		C	S				
6	C	S					
7	S						

CYK

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to CS \mid b, A \to a, B \to b, C \to AC \mid b\}$

Führe den CYK-Algorithmus für *aaaaabb* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

	a	a	a	a	a	b	b
	1	2	3	4	5	6	7
1	A	A	A	A	A	B,C,S	B,C,S
2					C	S	
3				C	S		
4			C	S			
5		C	S				
6	C	S					
7	S						

Da unten links das Startsymbol S in der Tabelle steht, liegt das Wort $L(G)$

Klassiker: „Beweisaufgaben“

- Nichtregularität einer Sprache zeigen mit Pumping-Lemma
- Nichtregularität einer Sprache zeigen mit Satz von Myhill und Nerode
- Nicht-Kontextfreiheit einer Sprache zeigen mit Pumping-Lemma für CFLs
- Unentscheidbarkeit zeigen mit Reduktion
- Unentscheidbarkeit zeigen mit Satz von Rice
- NP-Vollständigkeit zeigen, u.a. mit Polynomialzeitreduktionen

Blau: nur FSK

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j \$ b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Mit dem Pumping-Lemma:

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n > 0$ beliebig.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n > 0$ beliebig.
- Sei $z = a^n\$b^n$. Dann gilt $|z| \geq n$ und $z \in L$.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j \$ b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n > 0$ beliebig.
- Sei $z = a^n \$ b^n$. Dann gilt $|z| \geq n$ und $z \in L$.
- Sei $z = uvw$ ein beliebige Zerlegung von z mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n > 0$ beliebig.
- Sei $z = a^n\$b^n$. Dann gilt $|z| \geq n$ und $z \in L$.
- Sei $z = uvw$ ein beliebige Zerlegung von z mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Damit muss gelten $u = a^i$, $v = a^j$, $w = a^k\$b^n$ mit $i + j + k = n$ und $j \geq 1$. Dann gilt $uv^0w = a^{n-j}\$b^n \notin L$.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n > 0$ beliebig.
- Sei $z = a^n\$b^n$. Dann gilt $|z| \geq n$ und $z \in L$.
- Sei $z = uvw$ ein beliebige Zerlegung von z mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Damit muss gelten $u = a^i$, $v = a^j$, $w = a^k\$b^n$ mit $i + j + k = n$ und $j \geq 1$. Dann gilt $uv^0w = a^{n-j}\$b^n \notin L$.

Somit erfüllt L die Pumping-Eigenschaft nicht und kann daher auch nicht regulär sein.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L:

$$u \sim_L v \iff \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Satz von Myhill und Nerode: Index($\sim_L$) endlich g.d.w. L regulär.
Für die Aufgabe: Finde unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen
Es gilt $[a^j\$]_{\sim_L} \neq [a^i\$]_{\sim_L}$ für alle $i \neq j$:

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L:

$$u \sim_L v \iff \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Satz von Myhill und Nerode: Index($\sim_L$) endlich g.d.w. L regulär.
Für die Aufgabe: Finde unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen
Es gilt $[a^j\$]_{\sim_L} \neq [a^i\$]_{\sim_L}$ für alle $i \neq j$:

- für $w = b^i$ gilt $a^i\$w \in L$, aber $a^j\$w \notin L$

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L:

$$u \sim_L v \iff \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Satz von Myhill und Nerode: Index$(\sim_L)$ endlich g.d.w. L regulär.
Für die Aufgabe: Finde unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen
Es gilt $[a^j\$]_{\sim_L} \neq [a^i\$]_{\sim_L}$ für alle $i \neq j$:

- für $w = b^i$ gilt $a^i\$w \in L$, aber $a^j\$w \notin L$
- damit $a^j\$ \not\sim_L a^i\$$ für $i \neq j$.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L:

$$u \sim_L v \iff \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Satz von Myhill und Nerode: Index($\sim_L$) endlich g.d.w. L regulär.
Für die Aufgabe: Finde unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen
Es gilt $[a^j\$]_{\sim_L} \neq [a^i\$]_{\sim_L}$ für alle $i \neq j$:

- für $w = b^i$ gilt $a^i\$w \in L$, aber $a^j\$w \notin L$
- damit $a^j\$ \not\sim_L a^i\$$ für $i \neq j$.
- Es gibt unendlich viele disjunkte Äquivalenzklassen bez. $\sim_L$: $[a^1\$]_{\sim_L}, [a^2\$]_{\sim_L}, [a^3\$]_{\sim_L}, \ldots$

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L:

$$u \sim_L v \iff \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Satz von Myhill und Nerode: Index($\sim_L$) endlich g.d.w. L regulär.
Für die Aufgabe: Finde unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen
Es gilt $[a^j\$]_{\sim_L} \neq [a^i\$]_{\sim_L}$ für alle $i \neq j$:

- für $w = b^i$ gilt $a^i\$w \in L$, aber $a^j\$w \notin L$
- damit $a^j\$ \not\sim_L a^i\$$ für $i \neq j$.
- Es gibt unendlich viele disjunkte Äquivalenzklassen bez. $\sim_L$:
  $[a^1\$]_{\sim_L}, [a^2\$]_{\sim_L}, [a^3\$]_{\sim_L}, \ldots$
- Daher: Index($\sim_L$) $= \infty$.

Nichtregularität beweisen

Aufgabe

Zeige $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L:

$$u \sim_L v \iff \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L$$

Satz von Myhill und Nerode: Index($\sim_L$) endlich g.d.w. L regulär.
Für die Aufgabe: Finde unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen
Es gilt $[a^j\$]_{\sim_L} \neq [a^i\$]_{\sim_L}$ für alle $i \neq j$:

- für $w = b^i$ gilt $a^i\$w \in L$, aber $a^j\$w \notin L$
- damit $a^j\$ \not\sim_L a^i\$$ für $i \neq j$.
- Es gibt unendlich viele disjunkte Äquivalenzklassen bez. $\sim_L$: $[a^1\$]_{\sim_L}, [a^2\$]_{\sim_L}, [a^3\$]_{\sim_L}, \ldots$
- Daher: Index($\sim_L$) $= \infty$. Mit Satz von Myhill und Nerode folgt: L nicht regulär.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$.

Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$.

Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$.

Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$.

Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Sei w ein Wort. Sei M_w die Turingmaschine zu w.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$.

Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Sei w ein Wort. Sei M_w die Turingmaschine zu w.

f erstellt daraus eine Turingmaschine T, sodass ...

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

- T prüft, ob die Eingabe x ist. Falls nicht, geht T in eine Endlosschleife.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

- T prüft, ob die Eingabe x ist. Falls nicht, geht T in eine Endlosschleife.
- T löscht das Eingabeband.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w$ hält genau bei Eingabe $x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

- T prüft, ob die Eingabe x ist. Falls nicht, geht T in eine Endlosschleife.
- T löscht das Eingabeband.
- T simuliert M_w bei leerer Eingabe.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

- T prüft, ob die Eingabe x ist. Falls nicht, geht T in eine Endlosschleife.
- T löscht das Eingabeband.
- T simuliert M_w bei leerer Eingabe.
- Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiert T ansonsten läuft T endlos.

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

- T prüft, ob die Eingabe x ist. Falls nicht, geht T in eine Endlosschleife.
- T löscht das Eingabeband.
- T simuliert M_w bei leerer Eingabe.
- Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiert T ansonsten läuft T endlos.

Es gilt:

	$w \in H_0$
g.d.w.	M_w hält bei leerer Eingabe
g.d.w.	$T = M_{f(w)}$ hält bei Eingabe x
g.d.w.	$f(w) \in X$

Unentscheidbarkeit zeigen

Aufgabe

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } x\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

- T prüft, ob die Eingabe x ist. Falls nicht, geht T in eine Endlosschleife.
- T löscht das Eingabeband.
- T simuliert M_w bei leerer Eingabe.
- Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiert T ansonsten läuft T endlos.

Es gilt:

	$w \in H_0$
g.d.w.	M_w hält bei leerer Eingabe
g.d.w.	$T = M_{f(w)}$ hält bei Eingabe x
g.d.w.	$f(w) \in X$

Da f total und berechenbar ist, gilt $H_0 \leq X$.

Weitere typische Aufgaben

- Sprachen angeben in einem der vielen Formalismen: DFA, NFA, regulärer Ausdruck, reguläre Grammatik, kontextfreie Grammatik, Kellerautomat, deterministischer Kellerautomat Turingmaschine angeben
- Formalismen ineinander überführen, z.B. regulärer Ausdruck in DFA usw.
- Programme schreiben als: Turingmaschine, WHILE-, LOOP-, GOTO-Programm, primitiv rekursive Funktion, μ-rekursive Funktion
- Sprachen „typisieren“ in der Chomsky-Hierarchie

Blau: Nur FSK