$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

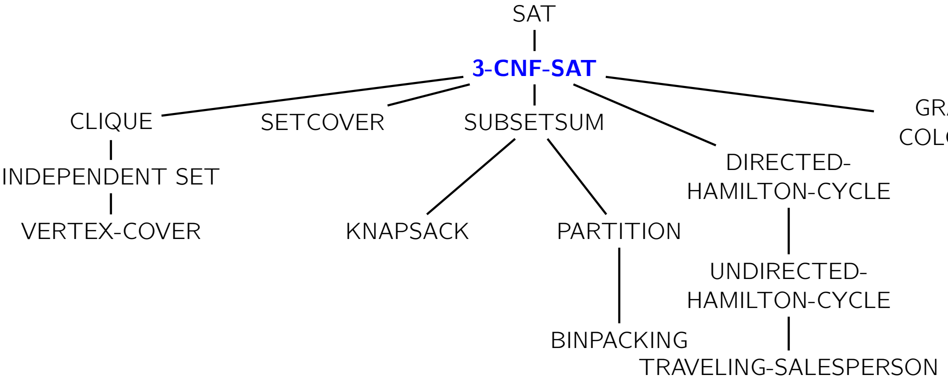
Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 11. Juli 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Inhalt der kommenden Vorlesungen

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise für eine Auswahl an Problemen.
$\mathcal{NP}$-Schwere durch Polynomialzeitreduktion bekannter $\mathcal{NP}$-vollständiger Probleme auf das neue Problem.



Wiederholung: NP-Vollständigkeit

Definition ($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$-vollständig, wenn gilt

1. $L \in \mathcal{NP}$ und
2. L ist $\mathcal{NP}$-schwer (manchmal auch $\mathcal{NP}$-hart genannt):
   Für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \leq_p L$

Ausreichend, um $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von L zu zeigen:

1. Zeige $L \in \mathcal{NP}$.
2. Zeige $L_0 \leq_p L$ für ein bekanntes $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem (z.B. $L_0 = \text{SAT}$).

3-CNF-SAT

Definition (3-CNF-SAT)

Das 3-CNF-SAT-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren als

gegeben: Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform, sodass jede Klausel höchstens 3 Literale enthält
(d.h. eine aussagenlogische Formel F in 3-CNF)

gefragt: Ist F erfüllbar? Genauer: Gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen mit den Wahrheitswerten 0 und 1, sodass F den Wert 1 erhält?

3-CNF-SAT

Konjunktive Normalform

Die aussagenlogische Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF),

$$F = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

- Literal $L_{i,j}$ ist aussagenlogische Variable oder deren Negation.
- $(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$ ist eine Klausel.
- Beispiel: $x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4)$.
- Erfüllende Belegung muss ≥ 1 Literal pro Klausel wahr machen.

Klauselmengenschreibweise: $\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}\}\}$

Annahme: Keine Klauseln, die x und $\neg x$ enthalten

Diese Klauseln sind immer wahr und können gelöscht werden.

Konjunktive Normalform

Jede aussagenlogische Formel kann in eine **äquivalente** konjunktive Normalform gebracht werden:

- $\iff$, $\implies$ auflösen
- Negationen nach innen schieben und anschließend Ausmultiplizieren (Distributivität, Kommutativität anwenden, um konjunktive Normalform herzustellen)

Aber:

- Algorithmus hat im worst case **exponentielle Laufzeit**.
- Algorithmus kann daher **nicht** für eine **Polynomialzeitreduktion** von SAT auf 3-CNF-SAT verwendet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis, Teil 1: 3-CNF-SAT ist in $\mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch eine Belegung der Variablen.
- Prüfe deterministisch, ob die Belegung die 3-CNF wahr macht. Akzeptiere in diesem Fall, sonst verwirf.
  Dies geht in Polynomialzeit in der Größe der 3-CNF.
- Daher kann 3-CNF-SAT auf einer NTM in Polynomialzeit entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (2)

Beweis, Teil 2: 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer

- Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.
- Gesucht: Polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass F erfüllbar g.d.w. 3-CNF $f(F)$ erfüllbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (2)

Beweis, Teil 2: 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer

- Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.
- Gesucht: Polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass F erfüllbar g.d.w. 3-CNF $f(F)$ erfüllbar.
- f muss **die Erfüllbarkeit erhalten**, aber nicht die **Äquivalenz**
- Verfahren, um F in erfüllbarkeitsäquivalente 3-CNF $f(F)$ umzuformen, sodass $f(F)$ **polynomielle Größe** in $|F|$ hat:

Tseitin-Transformation

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \rightsquigarrow F$, $\neg(F \land G) \rightsquigarrow \neg F \lor \neg G$, $\neg(F \lor G) \rightsquigarrow \neg F \land \neg G$, $\neg(F \iff G) \rightsquigarrow (\neg F) \iff G$ und $\neg(F \implies G) \rightsquigarrow F \land \neg G$ angewendet.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \rightsquigarrow F$, $\neg(F \wedge G) \rightsquigarrow \neg F \vee \neg G$, $\neg(F \vee G) \rightsquigarrow \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \iff G) \rightsquigarrow (\neg F) \iff G$ und $\neg(F \implies G) \rightsquigarrow F \wedge \neg G$ angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale):
  Für jeden Nichtblatt-Knoten: neue aussagenlogische Variable

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \rightsquigarrow F$, $\neg(F \land G) \rightsquigarrow \neg F \lor \neg G$, $\neg(F \lor G) \rightsquigarrow \neg F \land \neg G$, $\neg(F \iff G) \rightsquigarrow (\neg F) \iff G$ und $\neg(F \implies G) \rightsquigarrow F \land \neg G$ angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale):
  Für jeden Nichtblatt-Knoten: neue aussagenlogische Variable
- pro Gabelung: erzeuge

$$\begin{tikzcd} & \overset{X}{\otimes} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd} \qquad\qquad X \iff (L_1 \otimes L_2)$$

wobei $\otimes \in \{\iff, \land, \lor, \implies\}$ und L_1, L_2 entweder die neue Variable oder das Literal am Blatt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle **Negationen nach innen** vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \leadsto F$, $\neg(F \land G) \leadsto \neg F \lor \neg G$, $\neg(F \lor G) \leadsto \neg F \land \neg G$, $\neg(F \iff G) \leadsto (\neg F) \iff G$ und $\neg(F \implies G) \leadsto F \land \neg G$ angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale):
  Für jeden Nichtblatt-Knoten: neue aussagenlogische Variable
- pro Gabelung: erzeuge

$$\begin{tikzcd} & \otimes^{X} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd} \qquad\qquad X \iff (L_1 \otimes L_2)$$

  wobei $\otimes \in \{\iff, \land, \lor, \implies\}$ und L_1, L_2 entweder die neue Variable oder das Literal am Blatt.
- Konjugiere diese Formeln zu F' und schließlich erzeuge $W \land F'$, mit W Variable für die Wurzel.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation (Fortsetzung)

- Insgesamt: $W \wedge \bigwedge_{i,j,k}(X_i \iff (L_j \otimes_i L_k))$.
- Berechne für jede Teilformel $X_i \iff (L_j \otimes_i L_k)$ die CNF mit dem üblichen Algorithmus.
- Lösche doppelte Vorkommen von Literalen.
- Ergibt 3-CNF, da pro Klausel nur 3 verschiedene Variablen vorkommen können.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (4)

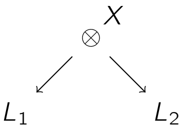
Komplexität:

- Größe der kleinen CNFs ist konstant.
- Jede Klausel hat nur 3 Literale: Mehr Variablen gibt es in den kleinen Formeln nicht, doppelte Literale löschen.
- Größe der 3-CNF ist polynomiell in der ursprünglichen Formel.
- Berechnung in Polynomialzeit geht daher.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

F erfüllbar g.d.w. $f(F)$ erfüllbar:

- „$\Rightarrow$“: Sei I Belegung mit $I(F) = 1$. Sei I' Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$ für alle Variablen, die in F vorkommen
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$ für



Dann gilt: $I'(f(F)) = 1$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

F erfüllbar g.d.w. $f(F)$ erfüllbar:

- „$\Rightarrow$": Sei I Belegung mit $I(F) = 1$. Sei I' Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$ für alle Variablen, die in F vorkommen
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$ für

$$\begin{tikzcd} & \overset{X}{\otimes} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd}$$

  Dann gilt: $I'(f(F)) = 1$
- „$\Leftarrow$": Sei J Belegung von $f(F)$ mit $J(f(F)) = 1$
  Dann: Die Restriktion J' von J auf die Variablen von F macht F wahr.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

F erfüllbar g.d.w. $f(F)$ erfüllbar:

- „$\Rightarrow$“: Sei I Belegung mit $I(F) = 1$. Sei I' Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$ für alle Variablen, die in F vorkommen
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$ für

$$\begin{tikzcd} & \overset{X}{\otimes} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd}$$

  Dann gilt: $I'(f(F)) = 1$
- „$\Leftarrow$“: Sei J Belegung von $f(F)$ mit $J(f(F)) = 1$
  Dann: Die Restriktion J' von J auf die Variablen von F macht F wahr.

Damit: SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.
Da SAT $\mathcal{NP}$-schwer, ist somit auch 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$-schwer. $\square$

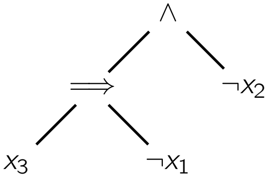
Beispiel (1)

$$F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \leadsto \quad & \neg\neg(x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \\ \leadsto \quad & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



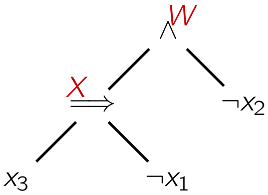
Beispiel (1)

$$F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \leadsto\quad & \neg\neg(x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \\ \leadsto\quad & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



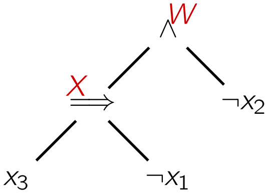
Beispiel (1)

$$F = \neg(\neg(x_3 \Longrightarrow \neg x_1) \lor x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \Longrightarrow \neg x_1) \lor x_2) \\ \leadsto\quad & \neg\neg(x_3 \Longrightarrow \neg x_1) \land \neg x_2 \\ \leadsto\quad & (x_3 \Longrightarrow \neg x_1) \land \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



Formel: $W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \Longrightarrow \neg x_1))$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\leadsto W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\leadsto W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\leadsto W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\leadsto W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor (x_3 \implies \neg x_1)) \land (X \lor \neg(x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\leadsto W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor \neg(\neg x_3 \lor \neg x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor (x_3 \implies \neg x_1)) \land (X \lor \neg(x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor \neg(\neg x_3 \lor \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor (x_3 \land x_1))$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor (x_3 \implies \neg x_1)) \land (X \lor \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor \neg(\neg x_3 \lor \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor (x_3 \land x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor x_3) \land (X \lor x_1)
\end{aligned}
$$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1)$$

Erfüllende Belegung J:

$J(W) = 1,\ J(X) = 1,\ J(x_1) = 0,\ J(x_2) = 0,\ J(x_3) = 1$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1))$$
$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1)$$

Erfüllende Belegung J:

$J(W) = 1,\ J(X) = 1,\ J(x_1) = 0,\ J(x_2) = 0,\ J(x_3) = 1$

Belegung J':

$J'(x_1) = 0,\ J'(x_2) = 0,\ J'(x_3) = 1$ erfüllt $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$.