Laufzeitkomplexität und die Klassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 4. Juli 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Komplexitätstheorie

Was ist Komplexitätstheorie?

- Teilgebiet der Theoretischen Informatik
- Grobes Thema: Komplexität von **entscheidbaren Problemen**
- Maße zum Messen des Ressourcenbedarfs von Algorithmen:
  - Rechenzeit
  - Platzbedarf
  - ...
- Komplexität eines Problems
  = Komplexität des besten Algorithmus bezüglich des Maßes
- Ziel: Einordnung von Problemen in Komplexitätsklassen

Komplexitätstheorie: Teilbereiche (1)

1. Teilbereich: Nachweis von oberen Schranken:

- Finde möglichst guten Algorithmus für konkretes Problem.
- Analysieren der Laufzeit- und Platzkomplexität.
- Z.B.: Der CYK-Algorithmus liefert obere Schranke $O(|P| \cdot n^3)$ für das Wortproblem für CFGs (mit $n =$ Wortlänge, P Produktionen der CFG).
- Möglichst genaue Schranken (bezüglich der O-Notation)

Komplexitätstheorie: Teilbereiche (2)

2. Teilbereich: Nachweis von unteren Schranken:

- Zeige, dass es keinen besseren Algorithmus gibt.
- Schwieriger, da man über alle Algorithmen argumentieren muss.
- Möglichst genaue Schranken (bezüglich der Ω-Notation)
- Oft ist $\Omega(n)$ ($n =$ Größe der Eingabe) eine untere Schranke für die Laufzeit, da man die Eingabe lesen muss.

Komplexitätstheorie: Teilbereiche (3)

3. Teilbereich: Auswirkung der **Maschinenmodelle auf den Ressourcenbedarf**

- insbesondere **Determinismus vs. Nichtdeterminismus**
- Wichtige ungelöste Frage: Das $\mathcal{P}$-**vs.-**$\mathcal{NP}$-**Problem**
- Komplexitätsklassen sind im Allgemeinen ungenauer (größer) als in den vorher genannten Teilbereichen.
- **Wir beschäftigen uns im letzten Teil des Kurses hiermit.**

Zeitkomplexität: Annahmen und Festlegungen (1)

Turingmaschinen:

- Wir betrachten nur **entscheidbare** Sprachen.
- Deswegen nehmen wir an:

  Die Turingmaschinen, welche diese Sprachen entscheiden, **halten auf jeder Eingabe an**.
- DTMs: Wir nehmen an, dass es „Verwirf“-Zustände gibt, für die die TM keine Nachfolgekonfiguration besitzen.
- NTMs haben solche Zustände von Haus aus.

Zeitkomplexität: Annahmen und Festlegungen (2)

Mehrband- vs. Einband-Turingmaschinen:

- Wir nehmen Mehrband-TMs, sie passen besser zu „normalen“ Rechnern.
- Kein „Vergeuden“ von Rechenzeit, nur um die Eingaben zu suchen.
- Unterschied:
  n Schritte auf Mehrband-TM können in
  $O(n^2)$ Schritten auf Einband-TM ausgeführt werden.
- Unterschied macht sich in Komplexitätsklassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$ **nicht** bemerkbar (siehe später).

Deterministische Laufzeit

Definition ($time_M$)

Sei M eine stets anhaltende Mehrband-DTM mit Startzustand z_0.
Für Eingabe w definieren wir

$time_M(w) := i$, wenn für die Startkonfiguration für z_0 und w nach i Schritten ein Endzustand oder Verwirf-Zustand erreichbar ist

Deterministische Laufzeit

Definition ($time_M$)

Sei M eine stets anhaltende Mehrband-DTM mit Startzustand z_0.
Für Eingabe w definieren wir

$time_M(w) := i$, wenn für die Startkonfiguration für z_0 und w nach i Schritten ein Endzustand oder Verwirf-Zustand erreichbar ist

Definition (Klasse $TIME(f(n))$)

Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei die Klasse $TIME(f(n))$ genau die Menge der Sprachen L, für die es eine stets anhaltende Mehrband-DTM M gibt, mit $L(M) = L$ und $time_M(w) \leq f(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Deterministische Laufzeit

Definition ($time_M$)

Sei M eine stets anhaltende Mehrband-DTM mit Startzustand z_0.
Für Eingabe w definieren wir

$time_M(w) := i$, wenn für die Startkonfiguration für z_0 und w nach i Schritten ein Endzustand oder Verwirf-Zustand erreichbar ist

Definition (Klasse $TIME(f(n))$)

Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei die Klasse $TIME(f(n))$ genau die Menge der Sprachen L, für die es eine stets anhaltende Mehrband-DTM M gibt, mit $L(M) = L$ und $time_M(w) \leq f(|w|)$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Sprache ist daher in $TIME(f(n))$, wenn sie von einer DTM für jede Eingabe der Länge n in $\leq f(n)$ Schritten entschieden wird.

Die Klasse $\mathcal{P}$

Definition (Polynom)

Ein Polynom ist eine Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Form

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Die Klasse $\mathcal{P}$

Definition (Polynom)

Ein Polynom ist eine Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ von der Form

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^i = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Definition (Klasse $\mathcal{P}$)

Die Klasse $\mathcal{P}$ ist definiert als

$$\mathcal{P} = \bigcup_{p \text{ Polynom}} TIME(p(n))$$

Nochmal: Zugehörigkeit zu $\mathcal{P}$

Formale Sprache L ist in Klasse $\mathcal{P}$ enthalten, wenn:

Es gibt stets anhaltende DTM M und ein Polynom p mit

- $L(M) = L$
- $\forall w \in \Sigma^* : time_M(w) \leq p(|w|)$.

Polynomielle Komplexität

Nachweis der polynomiellen Komplexität:

Zeige, dass die Komplexität $O(n^k)$ für Konstante k ist.

Polynomielle Komplexität

Nachweis der polynomiellen Komplexität:

Zeige, dass die Komplexität $O(n^k)$ für Konstante k ist.

Beispiele: Algorithmus mit Laufzeit

- $n \log n$ hat polynomielle Komplexität, da $n \log n \in O(n^2)$
- 2^n hat keine polynomielle Komplexität
- $n^{\log n}$ hat keine polynomielle Komplexität

Polynomielle Komplexität

Nachweis der polynomiellen Komplexität:

Zeige, dass die Komplexität $O(n^k)$ für Konstante k ist.

Beispiele: Algorithmus mit Laufzeit

- $n \log n$ hat polynomielle Komplexität, da $n \log n \in O(n^2)$
- 2^n hat keine polynomielle Komplexität
- $n^{\log n}$ hat keine polynomielle Komplexität

Sprechweisen:

- Algorithmus ist effizient = Algorithmus hat polynomielle Komplexität
- Analog: Problem ist effizient lösbar = Problem in $\mathcal{P}$

Nichtdeterminismus

Auch für NTMs nehmen wir an, dass sie auf allen Berechnungspfaden anhalten.

Beachte: Ein Wort wird **nicht akzeptiert**, wenn es auf **allen** Berechnungspfaden verworfen wird.

Definition ($ntime_M$)

Sei M eine stets anhaltende Mehrband-NTM, die für jede Eingabe anhält. Dann definieren wir die Laufzeit von M als

$$ntime_M(w) := \max\{i \mid \text{für die Startkonfiguration für } z_0 \text{ und } w \text{ hält } M \text{ in } i \text{ Schritten}\}$$

Beachte: Schöning verwendet eine andere Definition, es macht für die Definition der Klasse $\mathcal{NP}$ aber keinen Unterschied.

$NTIME$ und $\mathcal{NP}$

Definition (Klasse $NTIME(f(n))$)

Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bezeichne $NTIME(f(n))$ die Klasse aller Sprachen L, für die es eine stets anhaltende Mehrband-NTM M gibt mit $L(M) = L$ und für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $ntime_M(w) \leq f(|w|)$.

$NTIME$ und $\mathcal{NP}$

Definition (Klasse $NTIME(f(n))$)

Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bezeichne $NTIME(f(n))$ die Klasse aller Sprachen L, für die es eine stets anhaltende Mehrband-NTM M gibt mit $L(M) = L$ und für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $ntime_M(w) \leq f(|w|)$.

Definition (Klasse $\mathcal{NP}$)

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist definiert als

$$\mathcal{NP} = \bigcup_{p \text{ Polynom}} NTIME(p(n))$$

Lemma

Es gilt $TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$ und damit auch $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$

Lemma

Es gilt $TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$ und damit auch $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

Beweis:

- DTM als NTM auffassen
- ergibt NTM mit nur einem möglichen Berechnungspfad
- $time_M(w) = ntime_M(w)$
- $L \in TIME(f(n)) \implies L \in NTIME(f(n))$
- $\mathcal{P} = \bigcup_p TIME(p(n)) \subseteq \bigcup_p NTIME(p(n)) = \mathcal{NP}$ □

$\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$ (1)

Die Frage

$$\text{Gilt } \mathcal{P} = \mathcal{NP} \text{ oder } \mathcal{P} \neq \mathcal{NP}?$$

ist **ungelöst**.

- Das $\mathcal{P}$-vs.-$\mathcal{NP}$-Problem ist eines der sieben sogenannten Millennium-Probleme, die vom Clay Mathematics Institute im Jahr 2000 als Liste ungelöster Probleme der Mathematik herausgegeben wurde.
- Für dessen Lösung wurde ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgelobt.

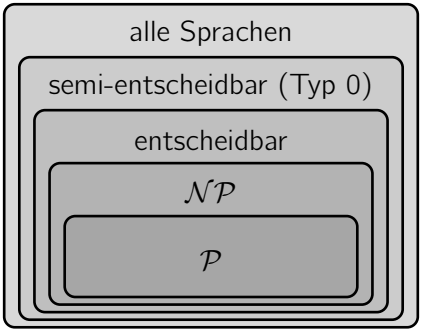
$\mathcal{P}$ vs. $\mathcal{NP}$ (2)

Wesentlicher Grund, der für $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ spricht:

> Man müsste für $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ einen deterministischen Polynomialzeitalgorithmus finden, für ein Problem, für das bisher nur deterministische Exponentialzeitalgorithmen bekannt sind.

Viele haben gesucht, keiner hat einen solchen Algorithmus gefunden.

Lage der Komplexitätsklasse (Schema)



Dabei unklar, ob $\mathcal{NP} = \mathcal{P}$