# Entscheidbarkeit, Unentscheidbarkeit und das Halteproblem

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 26. Juni 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

# Entscheidbarkeit

**Definition (Entscheidbarkeit)**

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, wenn die charakteristische Funktion von $L$, $\chi_L : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ mit

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ 0, & \text{falls } w \notin L \end{cases}$$

berechenbar ist.

Algorithmisch:

Der $\chi_L$-berechnende Algorithmus terminiert in jedem Fall und liefert ein Ergebnis.

# Semi-Entscheidbarkeit

**Definition (Semi-Entscheidbarkeit)**

Eine Sprache $L$ heißt **semi-entscheidbar** falls $\chi'_L : \Sigma^* \to \{0,1\}$ mit

$$\chi'_L(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } w \notin L \end{cases}$$

berechenbar ist.

Algorithmisch:

Der $\chi'_L$-berechnende Algorithmus terminiert nur, falls $w \in L$, und läuft anderenfalls endlos.

# Zusammenhang: entscheidbar und semi-entscheidbar

**Satz**

Ein Sprache $L$ ist genau dann entscheidbar, wenn $L$ und $\overline{L}$ jeweils semi-entscheidbar sind.

# Zusammenhang: entscheidbar und semi-entscheidbar

**Satz**

Ein Sprache $L$ ist genau dann entscheidbar, wenn $L$ und $\overline{L}$ jeweils semi-entscheidbar sind.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Konstruiere aus TM, die $\chi_L$ berechnet, zwei TMs, die $\chi'_L$ und $\chi'_{\overline{L}}$ berechnen.

„$\Leftarrow$“: Gegeben TMs $M_L$ und $M_{\overline{L}}$, die $\chi'_L$ und $\chi'_{\overline{L}}$ berechnen.
Konstruiere TM, die $\chi_L$ berechnet:

- Starte mit $i = 1$.
- Simuliere $i$ Schritte von $M_L$.
- Wenn diese akzeptiert (mit Ausgabe 1), dann akzeptiere mit Ausgabe 1.
- Ansonsten simuliere $i$ Schritte von $M_{\overline{L}}$.
- Wenn diese akzeptiert (mit Ausgabe 1), dann akzeptiere mit Ausgabe 0.
- Ansonsten erhöhe $i$ um 1 und starte von neuem. $\square$

# Komplement entscheidbar?

**Korollar**

Wenn $L$ entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{L}$ entscheidbar.

# Komplement entscheidbar?

**Korollar**

Wenn $L$ entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{L}$ entscheidbar.

Beweis:

- Da $L$ entscheidbar ist, sind $L$ und $\overline{L}$ semi-entscheidbar.
- Daher sind $\overline{\overline{L}} = L$ und $\overline{L}$ semi-entscheidbar.
- Daher ist $\overline{L}$ entscheidbar. $\square$

# Rekursive Aufzählbarkeit

**Definition (Rekursive Aufzählbarkeit)**

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv aufzählbar**,

- falls $L = \emptyset$ oder
- falls es eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ gibt, sodass $L = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(i)$.
  Man sagt dann „$f$ zählt $L$ auf“.

# Beispiel

**Lemma**

Die Sprache $\Sigma^*$ ist rekursiv aufzählbar.

# Beispiel

**Lemma**

Die Sprache $\Sigma^*$ ist rekursiv aufzählbar.

Beweis: Wir zeigen nur den Fall $|\Sigma| = 1$. Sei $\Sigma = \{a\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

- Konstruiere 2-Band-TM, die $n$ in Binärdarstellung auf Eingabeband erhält.
- TM erzeugt auf anderem Band das leere Wort.
- Anschließend zählt TM die Zahl auf dem Eingabeband um 1 herunter und fügt bei jedem Herunterzählen ein $a$ hinzu.
- Dies wird wiederholt bis auf dem Eingabeband 0 steht.
- Dann steht auf dem anderen Band $f(n) = \underbrace{a \cdots a}_{n}$. $\square$

# Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar (1)

**Satz**

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

# Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar (1)

**Satz**

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:

„⇒“: Sei $f$ die totale berechenbare Funktion, die $L$ aufzählt.
Dann berechnet der folgende Algorithmus $\chi'_L(w)$:

**Für** $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ **tue**
  **wenn** $f(i) = w$ **dann**
    stoppe und gib 1 aus

# Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar (2)

„$\Leftarrow$“:

- Wenn $L = \emptyset$, dann ist $L$ rekursiv aufzählbar.
- Anderenfalls sei $M$ eine TM, die $\chi'_L$ berechnet und sei $u \in L$ ein Wort. Wir konstruieren TM $M'$, die die $L$ aufzählende Funktion berechnet.
- Sei $n$ eine Eingabe. Wir interpretieren $n$ als $c(x, y)$.
- $M'$ simuliert $y$ Schritte von $M$ bei Eingabe $g(x)$, wobei $g$ die $\Sigma^*$ aufzählende Funktion ist.
- Wenn $M$ nach $y$ Schritten $g(x)$ akzeptiert, dann akzeptiert $M'$ mit Ausgabe $g(x)$.
  Anderenfalls, akzeptiert $M'$ mit Ausgabe $u$.

# Rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar (3)

„$\Leftarrow$“:

- ...
- Die von $M'$ berechnete Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} w, \text{falls } w = g(\mathit{left}(n)) \text{ und } M \text{ akzeptiert } w \text{ in } \mathit{right}(n) \text{ Schritten} \\ u, \text{ sonst} \end{cases}$$

- $f$ zählt $L$ auf, da für jedes Wort $w$ ein $x$ existiert mit $g(x) = w$ und ein $y$ existiert, sodass $M$ mit Eingabe $w$ nach $y$ Schritten akzeptiert. □

# Zusammenfassung: Äquivalente Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

- $L$ ist vom Typ 0.
- $L$ ist semi-entscheidbar.
- $L$ ist rekursiv aufzählbar.
- Es gibt eine Turingmaschine $M$, die $L$ akzeptiert (d.h. $L(M) = L$).
- $\chi'_L$ ist Turing-, WHILE-, GOTO-berechenbar.
- Es gibt berechenbare Funktionen, die $L$ als Wertebereich
  (nämlich die $L$ aufzählende Funktion)
  bzw. als Definitionsbereich (nämlich $\chi'_L$) haben.

# Rekursiv aufzählbar $\neq$ abzählbar

- Sprache $L$ ist abzählbar, wenn es eine totale Funktion $f : \mathbb{N} \to L$ gibt, sodass $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(i) = L$.
- Beachte: Abzählbarkeit fordert **nicht**, dass $f$ berechenbar ist.

# Gödelisierung von Turingmaschinen

Ziel:

Stelle Turingmaschinenbeschreibung als natürliche Zahl in Binärdarstellung dar.

Grund:

Andere Turingmaschinen können die Beschreibung als Eingabe erhalten, erzeugen usw.

# Gödelisierung von Turingmaschinen (2)

Sei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ eine DTM mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und

- $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_k\}$, wobei $a_0 = \Box$, $a_1 = \#$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$
- $Z = \{z_0, \ldots, z_n\}$
- $E = \{z_n\}$

Für $\delta(z_p, a_i) = (z_q, a_j, D)$ erzeuge Wort über Alphabet $\{0, 1, \#\}$:

$$w_{p,i,q,j,D} = \#\#bin(p)\#bin(i)\#bin(q)\#bin(j)\#bin(D_m)$$

mit $D_m = 0$, falls $D = L$, $D_m = 1$, falls $D = R$, $D_m = 2$, falls $D = N$

Kodierung $w_\delta$: Schreibe alle $\delta$-Wörter hintereinander.

Schließlich: Kodiere Alphabet $\{0, 1, \#\}$ durch $\{0 \mapsto 00, 1 \mapsto 01, \# \mapsto 11\}$.

Wende dies auf $w_\delta$ an.

Wir bezeichnen mit $w_M$ die so kodierte TM $M$.

# Gödelisierung von Turingmaschinen (3)

- Nicht jedes Wort über $\{0, 1\}$ entspricht der Kodierung einer Turingmaschine.
- Sei $\widehat{M}$ eine beliebige aber feste Turingmaschine.
- Definiere für jedes $w \in \{0, 1\}^*$ die zugehörige TM $M_w$:

$$M_w := \begin{cases} M, & \text{wenn } w = w_M \\ \widehat{M}, & \text{sonst} \end{cases}$$

# Spezielles Halteproblem

**Definition (Spezielles Halteproblem)**

Das spezielle Halteproblem ist die Sprache

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für Eingabe } w\}$$

# Unentscheidbarkeit von $K$ (1)

**Satz**

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (und damit *unentscheidbar*).

# Unentscheidbarkeit von $K$ (1)

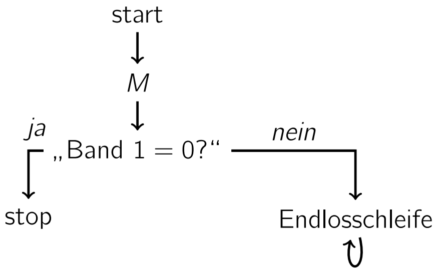
**Satz**

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar (und damit *unentscheidbar*).

Beweis:

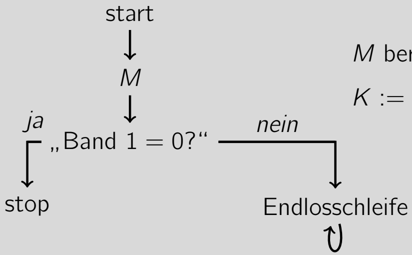
- Annahme: $K$ ist entscheidbar.
- Dann ist $\chi_K$ berechenbar, und es gibt TM $M$, die $\chi_K$ berechnet.
- Konstruiere $M'$:

1. $M'$ lässt $M$ ablaufen.
2. Wenn $M$ mit 0 auf dem Band endet, dann akzeptiert $M'$.
3. Wenn $M$ mit 1 auf dem Band endet, dann läuft $M'$ in eine Endlosschleife.



# Unentscheidbarkeit von $K$ (2)

Zur Erinnerung:




Turingmaschine $M'$

$M$ berechnet $\chi_K$ wobei $K$:

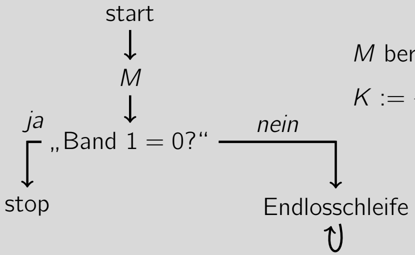
$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für Eingabe } w\}$

Betrachte nun $M'$ auf der Eingabe $w_{M'}$:

Es gilt: $M'$ hält für Eingabe $w_{M'}$
g.d.w. $M$ angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus
g.d.w. $\chi_K(w_{M'}) = 0$
g.d.w. $w_{M'} \notin K$
g.d.w. $M'$ hält nicht für Eingabe $w_{M'}$

# Unentscheidbarkeit von $K$ (2)

Zur Erinnerung:




Turingmaschine $M'$

$M$ berechnet $\chi_K$ wobei $K$:

$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für Eingabe } w\}$

Betrachte nun $M'$ auf der Eingabe $w_{M'}$:

Es gilt: $M'$ hält für Eingabe $w_{M'}$

g.d.w. $M$ angesetzt auf $w_{M'}$ gibt 0 aus

g.d.w. $\chi_K(w_{M'}) = 0$

g.d.w. $w_{M'} \notin K$

g.d.w. $M'$ hält nicht für Eingabe $w_{M'}$

# Unentscheidbarkeit von $K$ (3)

- $M'$ hält für Eingabe $w_{M'} \iff M'$ hält nicht für Eingabe $w_{M'}$.
- Widerspruch. Annahme war falsch.
- $K$ ist nicht entscheidbar, sondern unentscheidbar. $\square$