Deterministisch kontextfreie Sprachen und Eigenschaften

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 5. Juni 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Deterministisch kontextfreie Sprachen

- Definiert durch deterministische Kellerautomaten mit **Akzeptanz durch Endzustände**
- ε-Übergänge sind erlaubt, aber nur wenn es keinen anderen Übergang (mit einem Terminalzeichen und selben Kellersymbol) gibt.

Deterministisch kontextfreie Sprachen

- Definiert durch deterministische Kellerautomaten mit **Akzeptanz durch Endzustände**
- ε-Übergänge sind erlaubt, aber nur wenn es keinen anderen Übergang (mit einem Terminalzeichen und selben Kellersymbol) gibt.

Definition (Deterministischer Kellerautomat, DPDA)

Ein Kellerautomat mit Endzuständen $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ist deterministisch (ein DPDA) wenn für alle $(z, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ gilt

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$$

Die von DPDAs akzeptierten Sprachen heißen deterministisch kontextfrei.

Beispiele (1)

Satz

Die Sprache $L = \{w\$\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beispiele (1)

Satz

Die Sprache $L = \{w\$\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$
\begin{aligned}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, A\#)\} & \delta(z_0, \$, A) &= \{(z_1, A)\}\\
\delta(z_0, b, \#) &= \{(z_0, B\#)\} & \delta(z_0, \$, B) &= \{(z_1, B)\}\\
\delta(z_0, a, A) &= \{(z_0, AA)\} & \delta(z_0, \$, \#) &= \{(z_1, \#)\}\\
\delta(z_0, b, A) &= \{(z_0, BA)\} & \delta(z_1, a, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\}\\
\delta(z_0, a, B) &= \{(z_0, AB)\} & \delta(z_1, b, B) &= \{(z_1, \varepsilon)\}\\
\delta(z_0, b, B) &= \{(z_0, BB)\} & \delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ sonst. $\square$

Beispiele (1)

Satz

Die Sprache $L = \{w\$\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{rlrl}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, A\#)\} & \delta(z_0, \$, A) &= \{(z_1, A)\} \\
\delta(z_0, b, \#) &= \{(z_0, B\#)\} & \delta(z_0, \$, B) &= \{(z_1, B)\} \\
\delta(z_0, a, A) &= \{(z_0, AA)\} & \delta(z_0, \$, \#) &= \{(z_1, \#)\} \\
\delta(z_0, b, A) &= \{(z_0, BA)\} & \delta(z_1, a, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, a, B) &= \{(z_0, AB)\} & \delta(z_1, b, B) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, b, B) &= \{(z_0, BB)\} & \delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ sonst. □

Beachte: $L = \{w\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist nicht deterministisch kontextfrei aber kontextfrei.

Beispiele (2)

Satz

Die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beispiele (2)

Satz

Die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{\#, A\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, A\#)\}\\
\delta(z_0, a, A) &= \{(z_0, AA)\}\\
\delta(z_0, b, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\}\\
\delta(z_1, b, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\}\\
\delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

und $\delta(z_i, c, B) = \emptyset$ sonst. □

Eigenschaften von deterministisch kontextfreien Sprachen

Theorem (Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen)

1. Das Wortproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen kann in Linearzeit entschieden werden.
2. Für deterministisch kontextfreie Sprachen gibt es eindeutige Grammatiken.
3. Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis: siehe Literatur.

Weitere Eigenschaften

Satz

Deterministische kontextfreie Sprachen sind **nicht** abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis: Schnitt:

- Die Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ sind deterministisch kontextfrei.
- $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht kontextfrei.

Weitere Eigenschaften

Satz

Deterministische kontextfreie Sprachen sind **nicht** abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis: Vereinigung:

- Beweis durch Widerspruch
- Annahme: Deterministische CFLs sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung.
- Da deterministische CFLs auch abgeschlossen bezüglich Komplement sind, folgt aus $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, dass deterministische CLFs abgeschlossen bezüglich Schnitt sind. Widerspruch.
- D.h. die Annahme ist falsch, deterministische CFLs sind nicht abgeschlossen bezüglich $\cup$. $\square$

Weitere Eigenschaften (2)

Satz

Der Schnitt einer (deterministisch) kontextfreien Sprachen mit einer regulären Sprache ist (deterministisch) kontextfrei.

Weitere Eigenschaften (2)

Satz

Der Schnitt einer (deterministisch) kontextfreien Sprachen mit einer regulären Sprache ist (deterministisch) kontextfrei.

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA mit Endzuständen und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein DFA. Konstruiere PDA mit Endzuständen:
$M'' = (Z \times Z', \Sigma, \delta'', (z_0, z'_0), \#, E \times E')$ mit

- $((z_k, z'_k), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z'_i), a, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, a, A)$ und $\delta'(z'_i, a) = z'_k$
- $((z_k, z'_i), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z'_i), \varepsilon, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, \varepsilon, A)$.

Es gilt:

- $L(M'') = L(M) \cap L(M')$, denn M'' simuliert M und M' gleichzeitig, und akzeptiert nur, wenn beide Automaten akzeptieren.
- M'' ist deterministisch, wenn M deterministisch ist.

Entscheidbarkeitsfragen für CFLs

- CYK-Algorithmus zeigt: Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.
- Viele Fragestellungen sind für CFLs unentscheidbar (z.B. das Äquivalenzproblem und das Schnittproblem).
- Wir betrachten weitere Entscheidungsprobleme (Beweise folgen für FSK, später).

Satz

Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist entscheidbar.

Satz

Das Endlichkeitsproblem für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.