LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Der CYK-Algorithmus zum effizienten Entscheiden des Wortproblems für kontextfreie Sprachen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 6. Juni 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Hintergrund zu den kontextfreien Sprachen

- Kontextfreie Sprachen sind insbesondere nützlich um Sprachen mit Klammerungen zu beschreiben.
- Die Syntax von Programmiersprachen wird meist mit einer kontextfreien Grammatik angegeben.

Beispiele:

- $G = (\{E, M, Z\}, \{+, *, (,)\} \cup \{0, \ldots, 9\}, P, E)$ mit

$$
\begin{aligned}
P = \{E &\rightarrow M \mid E + M, \\
M &\rightarrow Z \mid M * Z, \\
Z &\rightarrow N \mid (E), \\
N &\rightarrow 1D \mid \ldots \mid 9D, \\
D &\rightarrow 0D \mid \ldots \mid 9D \mid \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

- $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei: Produktionen $\{S \rightarrow \varepsilon \mid T, T \rightarrow aTb \mid ab\}$ mit S als Startsymbol erzeugen L.

Wiederholung: Eine nichtkontextfreie Sprache

Satz

Die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.

Den Beweis haben wir gesehen (nur FSK).

Einleitung zum Wortproblem

- Wir wissen bereits: Das Wortproblem für Typ 1-Sprachen ist entscheidbar.
- Daher ist auch das Wortproblem für Typ 2-Sprachen entscheidbar.
- Aber: Der Algorithmus für Typ 1-Sprachen benötigt exponentiell viele Schritte.
- Nun sehen wir einen Polynomialzeitalgorithmus.
- Die wesentliche Entwurfsmethode dabei ist dynamische Programmierung.

Effizientes Lösen des Wortproblems für CFLs

- Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami für CFLs
- Veröffentlicht in den 1960er Jahren
- Kurz: CYK-Algorithmus

Idee des CYK-Algorithmus

- Eingabe:
  - CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform:

    (Zur Erinnerung für FSK:) G ist in **Chomsky-Normalform**, wenn für jede Produktion $A \to w \in P$ gilt: $w = a \in \Sigma$ oder $w = BC$ mit $B, C \in V$.

    Satz: Für jede CFG G mit $\varepsilon \notin L(G)$ kann sprachäquivalente Chomsky-NF berechnet werden.
  - Wort $w \in \Sigma^*$
- Ausgabe:
  - ja, wenn $w \in L(G)$
  - nein, wenn $w \notin L(G)$
- Grundidee des Algorithmus:
  (Rekursiver) Test, ob eine Variable A ein Wort u erzeugt.
- Verwende Test zum Prüfen, ob das Startsymbol S das Wort w erzeugt.

Idee des CYK-Algorithmus (2)

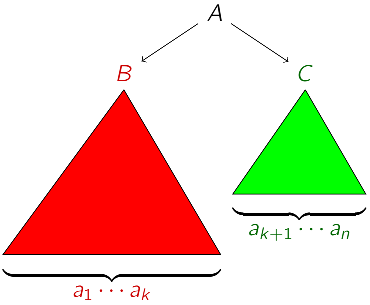
Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

- Wenn $u = a_1 \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \to a_1 \in P$.

Idee des CYK-Algorithmus (2)

Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

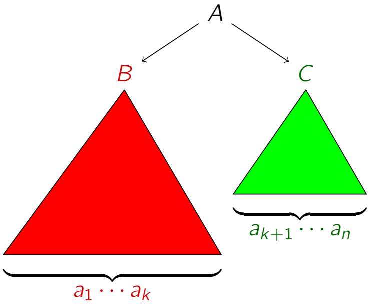
- Wenn $u = a_1 \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \to a_1 \in P$.
- Anderenfalls $(n > 1)$ kann u nur erzeugt werden, wenn:
  - es gibt Produktion $A \to BC \in P$
  - es gibt Index $1 \leq k < n$, sodass:
    - B erzeugt $a_1 \cdots a_k$ und
    - C erzeugt $a_{k+1} \cdots a_n$.



Idee des CYK-Algorithmus (2)

Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

- Wenn $u = a_1 \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \to a_1 \in P$.
- Anderenfalls $(n > 1)$ kann u nur erzeugt werden, wenn:
  - es gibt Produktion $A \to BC \in P$
  - es gibt Index $1 \leq k < n$, sodass:
    - B erzeugt $a_1 \cdots a_k$ und
    - C erzeugt $a_{k+1} \cdots a_n$.



- Daher prüfe für alle $A \to BC \in P$ und alle k mit $1 \leq k < n$ rekursiv, ob B das Wort $a_1 \cdots a_k$ und C das Wort $a_{k+1} \cdots a_n$ erzeugt.

Beispiel

Betrachte die Grammatik mit

$$S \to AB \mid BA$$
$$A \to AA \mid AB \mid a$$
$$B \to BB \mid b$$

und das Wort $bbbaab$.

S erzeugt $bbbaab$, denn $S \to BA$ und

- B erzeugt bbb, denn $B \to BB$ und
  - B erzeugt bb, denn $B \to BB$ und $B \to b$ und $B \to b$
  - B erzeugt b, denn $B \to b$
- A erzeugt aab, denn $A \to AB$ und
  - A erzeugt aa, denn $A \to AA$ und
    - A erzeugt a, denn $A \to a$ und
    - A erzeugt a, denn $A \to a$
  - B erzeugt b, denn $B \to b$

Beispiel

Betrachte die Grammatik mit

$$S \to AB \mid BA$$
$$A \to AA \mid AB \mid a$$
$$B \to BB \mid b$$

und das Wort $bbbaab$.

Bevor der rekursive Algorithmus diesen richtigen Pfad findet, sucht er einige erfolglose ab, z.B. für $S \to AB$

- Prüfe, ob A erzeugt b und B erzeugt $bbaab$ gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt bb und B erzeugt $baab$ gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt bbb und B erzeugt aab gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt $bbba$ und B erzeugt ab gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt $bbbaa$ und B erzeugt b gilt.

S erzeugt $bbbaab$, denn $S \to BA$ und

- B erzeugt bbb, denn $B \to BB$ und
  - B erzeugt bb, denn $B \to BB$ und $B \to b$ und $B \to b$
  - B erzeugt b, denn $B \to b$
- A erzeugt aab, denn $A \to AB$ und
  - A erzeugt aa, denn $A \to AA$ und
    - A erzeugt a, denn $A \to a$ und
    - A erzeugt a, denn $A \to a$
  - B erzeugt b, denn $B \to b$

Naives Suchen wiederholt dieselben Tests, z.B. ob „A erzeugt b“ gilt.

Idee des CYK-Algorithmus (3)

- Effizienz: Statt Rekursion verwende dynamische Programmierung.
- Algorithmus berechnet Menge $V(i,j) \subseteq V$, sodass

$$V(i,j) = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* a_i \cdots a_{i+j-1}\}$$

„$V(i,j)$ enthält alle Variablen $A \in V$, die $a_i \cdots a_{i+j-1}$ ($=$ Teilwort von u ab Position i mit Länge j) erzeugen.“

- Berechnung der $V(i,j)$:
  - Starte mit $V(i,1) = \{A \mid A \to a_i \in P\}$.
  - Berechne $V(i,j)$ mit ansteigender Länge j.

    Für $j > 1$ gilt:

$$A \in V(i,j) \text{ g.d.w.}$$
$$A \to BC \in P \text{ und } B \in V(i,k),\ C \in V(i+k, j-k)$$

Berechnung: Für festes (i,j) betrachte alle k mit $k = 1, 2, \ldots, j-1$.

- Finaler Schritt: Prüfe, ob $S \in V(1,n)$.

Algorithmus 8: CYK-Algorithmus

Eingabe: CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform und Wort $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$
Ausgabe: `Ja`, wenn $w \in L(G)$ und `Nein`, wenn $w \notin L(G)$
Beginn

```
für i = 1 bis n tue
    V(i,1) = {A ∈ V | A → a_i ∈ P}
für j = 2 bis n tue
    für i = 1 bis n + 1 − j tue
        V(i,j) = ∅;
        für k = 1 bis j − 1 tue
            V(i,j) = V(i,j) ∪ { A ∈ V | A → BC ∈ P, B ∈ V(i,k), C ∈ V(i+k, j−k) }
wenn S ∈ V(1,n) dann
    return Ja
sonst
    return Nein
```

$$V(i,j) = V(i,j) \cup \left\{ A \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC \in P, \\ B \in V(i,k), \\ C \in V(i+k, j-k) \end{array} \right\}$$

Laufzeit des CYK-Algorithmus

- Drei geschachtelte für-Schleifen
- Im Inneren wird noch über alle Produktionen aus P iteriert.
- Die Laufzeitkomplexität kann mit $\mathcal{O}(n^3 \cdot |P|)$ abgeschätzt werden.

Theorem

Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen kann in Polynomialzeit entschieden werden.

Beispiel (1)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

$V(i,j)$-Tabelle ist zunächst leer:

		b	b	d	d	c
	$V(i,j)$ \ i	1	2	3	4	5
j	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:

	b	b	d	d	c
	i				
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
j: 1					
2					
3					
4					
5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:

i

j

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B				
2					
3					
4					
5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \rightarrow AC,\ A \rightarrow BE,\ A \rightarrow BD,\ E \rightarrow AD,\ C \rightarrow c,\ B \rightarrow b,\ D \rightarrow d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B			
2					
3					
4					
5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:

		b	b	d	d	c
				i		
	$V(i,j)$	1	2	3	4	5
	1	B	B	D		
	2					
j	3					
	4					
	5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	
2					
3					
4					
5					

Beispiel (2)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2					
3					
4					
5					

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2					
3					
4					
5					

3-fache Schleife:

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \rightarrow AC,\ A \rightarrow BE,\ A \rightarrow BD,\ E \rightarrow AD,\ C \rightarrow c,\ B \rightarrow b,\ D \rightarrow d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2					
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 2, i = 1, k = 1: $V(1,2) = V(1,2) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1,1), \\ C \in V(2,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

$i \longrightarrow$, $j \downarrow$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 2, i = 2, k = 1: $V(2,2) = V(2,2) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(2,1), \\ C \in V(3,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 2, i = 3, k = 1: $V(3,2) = V(3,2) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(3,1), \\ C \in V(4,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 2, i = 4, k = 1: $V(4,2) = V(4,2) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(4,1), \\ C \in V(5,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 3, i = 1, k = 1: $V(1,3) = V(1,3) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,1), \\ C \in V(2,2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 3, i = 1, k = 2: $V(1,3) = V(1,3) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,2), \\ C \in V(3,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3					
4					
5					

3-fache Schleife: j = 3, i = 2, k = 1: $V(2,3) = V(2,3) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(2,1), \\ C \in V(3,2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

$V(i,j)$	1 (b)	2 (b)	3 (d)	4 (d)	5 (c)
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4					
5					

3-fache Schleife: j = 3, i = 2, k = 2: $V(2,3) = V(2,3) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(2,2), \\ C \in V(4,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4					
5					

3-fache Schleife: j = 3, i = 3, k = 1: $V(3,3) = V(3,3) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(3,1), \\ C \in V(4,2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4					
5					

3-fache Schleife: j = 3, i = 3, k = 2: $V(3,3) = V(3,3) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(3,2), \\ C \in V(5,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 4, i = 1, k = 1: $V(1,4) = V(1,4) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,1), \\ C \in V(2,3) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

$V(i,j)$	1 (b)	2 (b)	3 (d)	4 (d)	5 (c)
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 4, i = 1, k = 2: $V(1,4) = V(1,4) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,2), \\ C \in V(3,2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 4, i = 1, k = 3: $V(1,4) = V(1,4) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,3), \\ C \in V(4,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 4, i = 2, k = 1: $V(2,4) = V(2,4) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(2,1), \\ C \in V(3,3) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

		b	b	d	d	c
	$V(i,j)$	1	2	3	4	5
j	1	B	B	D	D	C
	2		A			
	3		E			
	4	A				
	5					

3-fache Schleife: j = 4, i = 2, k = 2: $V(2,4) = V(2,4) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(2,2), \\ C \in V(4,2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 4, i = 2, k = 3: $V(2,4) = V(2,4) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(2,3), \\ C \in V(5,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 5, i = 1, k = 1: $V(1,5) = V(1,5) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,1), \\ C \in V(2,4) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

b b d d c

$i \longrightarrow$

$j \downarrow$

$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 5, i = 1, k = 2: $V(1,5) = V(1,5) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,2), \\ C \in V(3,3) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5					

3-fache Schleife: j = 5, i = 1, k = 3: $V(1,5) = V(1,5) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC, \\ B \in V(1,3), \\ C \in V(4,2) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow AC,\ A \rightarrow BE,\ A \rightarrow BD,\ E \rightarrow AD,\ C \rightarrow c,\ B \rightarrow b,\ D \rightarrow d\}$

	b	b	d	d	c
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5	S				

3-fache Schleife: j = 5, i = 1, k = 4: $V(1,5) = V(1,5) \cup \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \in V(1,4), \\ C \in V(5,1) \end{array} \right\}$

Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

	b	b	d	d	c
			i		
$V(i,j)$	1	2	3	4	5
j = 1	B	B	D	D	C
2		A			
3		E			
4	A				
5	S				

Da $S \in V(1,5)$ gilt $w \in L(G)$.

Web-Tool zum Üben / Anschauen

`http://www.cip.ifi.lmu.de/~lindebar/`