Reguläre Sprachen: Abschlusseigenschaften und Entscheidbarkeitsresultate

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 16. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann sind $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ und L_1^* regulär.

Abschlusseigenschaften

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann sind $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ und L_1^* regulär.

Beweis:

Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen:

- Benutze reguläre Ausdrücke α_1, α_2 mit $L(\alpha_i) = L_i$.
- $(\alpha_1|\alpha_2)$ erzeugt $L(\alpha_1|\alpha_2) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) = L_1 \cup L_2$,
- $\alpha_1\alpha_2$ erzeugt $L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) = L_1 L_2$ und
- $(\alpha_1)^*$ erzeugt $L(\alpha_1)^* = L_1^*$. $\square$

Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung. D.h. wenn L regulär ist, dann ist $\overline{L}$ regulär.

Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung. D.h. wenn L regulär ist, dann ist $\overline{L}$ regulär.

Beweis:

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA der L akzeptiert.
- Dann akzeptiert $\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$ die Sprache $\overline{L}$ (d.h. das Komplement von L):
  Offensichtlich gilt $\widehat{\delta}(z_0, w) \in E \iff \neg(\widehat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E)$.
- Daher ist $\overline{L}$ regulär. $\square$

Abschlusseigenschaften (3)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ regulär.

Abschlusseigenschaften (3)

Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis:

- Folgt aus $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ und da reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Komplementbildung. $\square$

Abschlusseigenschaften (3)

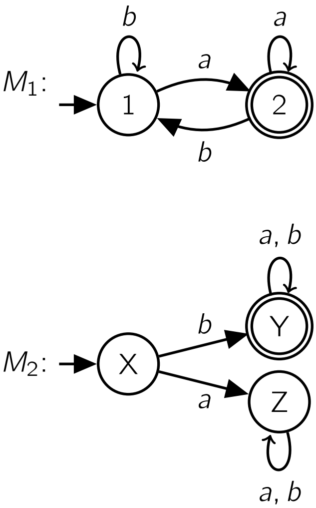
Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt. D.h. wenn L_1, L_2 regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ regulär.

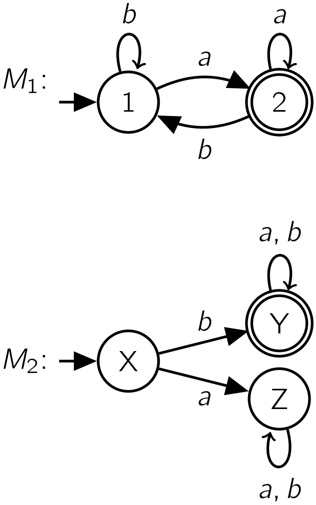
Alternativer Beweis:

- Seien $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{0,1}, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{0,2}, E_2)$ DFAs, die $L_1 = L(M_1)$ und $L_2 = L(M_2)$ akzeptieren.
- Der Produktautomat von M_1 und M_2 ist der DFA $M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{0,1}, z_{0,2}), E_1 \times E_2)$ mit $\delta((z_1, z_2), a) = (\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a))$ für alle $a \in \Sigma$ und $(z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2$.
- M akzeptiert $L_1 \cap L_2$, denn es gilt: $\widehat{\delta}((z_{0,1}, z_{0,2}), w) \in E_1 \times E_2 \iff \left(\widehat{\delta_1}(z_{0,1}, w) \in E_1 \land \widehat{\delta_2}(z_{0,2}, w) \in E_2\right)$. $\square$

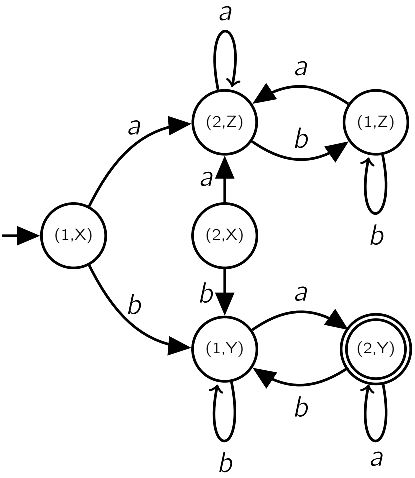
Beispiel: Produktautomat



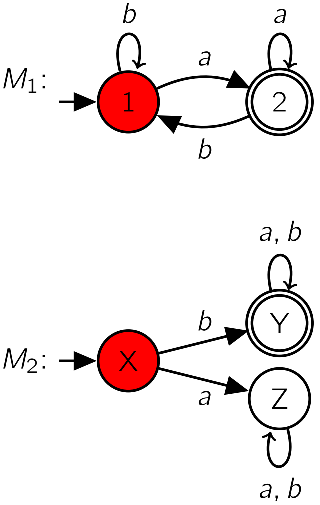
Beispiel: Produktautomat



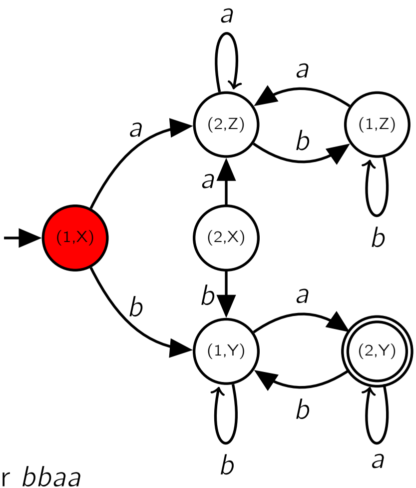
Produktautomat $M_1 \times M_2$



Beispiel: Produktautomat

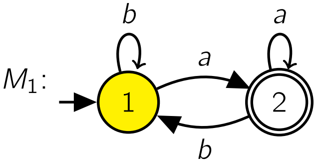


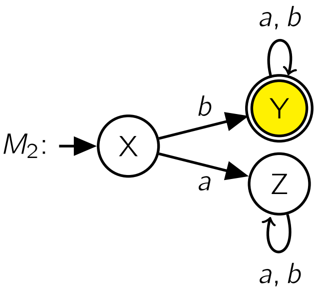
Produktautomat $M_1 \times M_2$



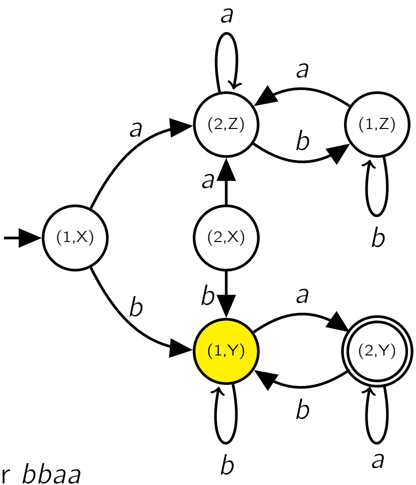
Lauf für *bbaa*

Beispiel: Produktautomat



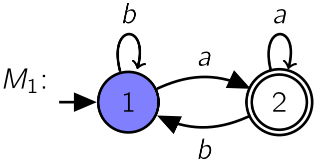


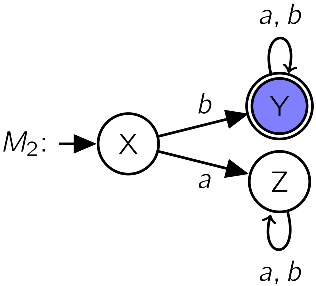
Produktautomat $M_1 \times M_2$



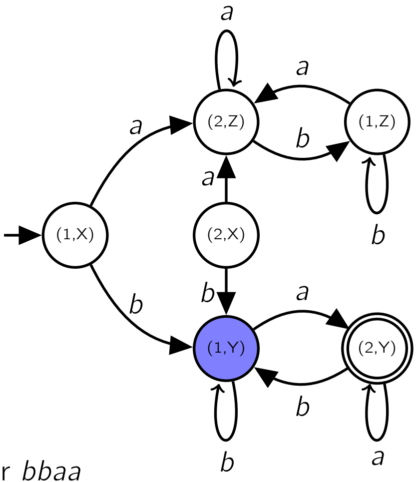
Lauf für $\underline{b}baa$

Beispiel: Produktautomat



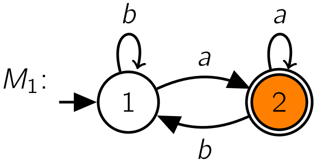


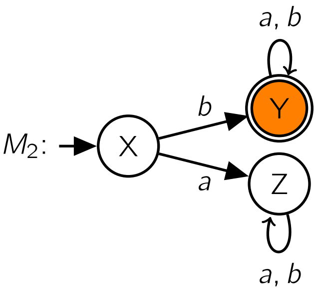
Produktautomat $M_1 \times M_2$



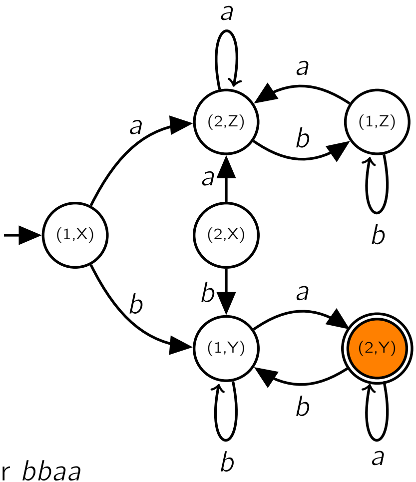
Lauf für $b\underline{b}aa$

Beispiel: Produktautomat



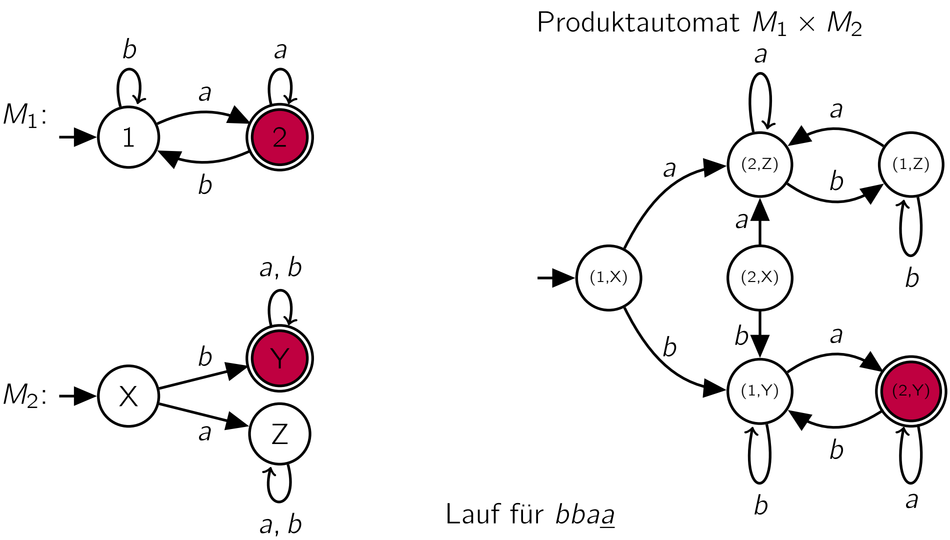


Produktautomat $M_1 \times M_2$



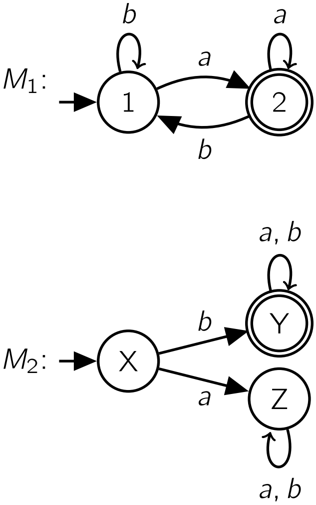
Lauf für $bb\underline{a}a$

Beispiel: Produktautomat

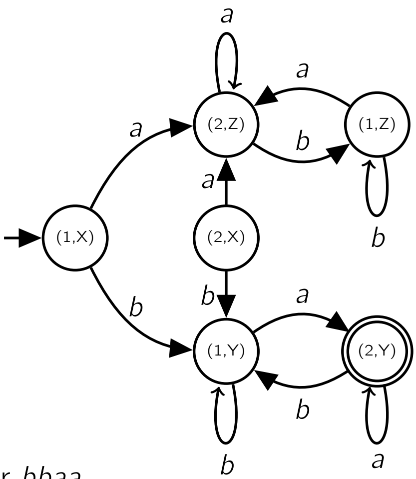


Lauf für $bba\underline{a}$

Beispiel: Produktautomat



Produktautomat $M_1 \times M_2$



Lauf für *bbaa*

Abschlusseigenschaften zusammengefasst

Theorem (Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen)

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereingung, Schnitt, Komplementbildung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (1)

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (1)

Satz

Die Sprache $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme L ist regulär.
- Dann ist $\overline{L}$ auch regulär.
- $\overline{L} = \{a\}^* \setminus L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist nicht regulär (bereits gezeigt).
- Widerspruch. Daher ist L nicht regulär. $\square$

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften (2)

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme: L ist regulär.
- Sprache $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, da der reguläre Ausdruck $a^* b^*$ sie erzeugt.
- Da L und L' regulär sind, ist auch $L \cap L'$ regulär.
- $L \cap L' = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist aber nicht regulär (bereits gezeigt).
- Widerspruch. Daher ist L nicht regulär. $\square$

Entscheidbarkeitsresultate: Wortproblem

- Bereits gezeigt: Das Wortproblem für Typ 1, 2, 3-Sprachen ist entscheidbar.
- Für DFAs ist das Wortproblem in Linearzeit in der Länge des Wortes lösbar, denn die Berechnung von $\widehat{\delta}(z_0, w)$ braucht für einen DFA nur $|w|$ Schritte.

Entscheidbarkeitsresultate: Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Entscheidbarkeitsresultate: Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L eine reguläre Sprache und sei M ein DFA mit $L(M) = L$.
- Dann gilt $L = \emptyset$ g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in M gibt.
- Dies kann man leicht mit einer Tiefensuche (Depth-First-Search) auf dem Zustandsgraph von M prüfen. $\square$

Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L eine reguläre Sprache und M ein DFA mit $L(M) = L$.
- Es gilt $|L| < \infty$ g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.
- Prüfe dies mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von M. $\square$

Schnitttproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Schnittproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
- Seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Berechne den Produktautomaten M mit $L(M) = L_1 \cap L_2$
- Prüfe das Leerheitsproblem für $L(M)$. $\square$

Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen

Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

Beweis:

- Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen.
- Seien M_1, M_2 DFAs mit $L(M_i) = L_i$.
- Berechne die Minimalautomaten von M_1 und M_2.
- Prüfe die Minimalautomaten auf Gleichheit bis auf Umbenennung. $\square$

Zusammenfassung: Reguläre Sprachen

- Formalismen: Reguläre Grammatiken, DFAs, NFAs (mit oder ohne ϵ-Übergänge), reguläre Ausdrücke
- Pumping-Lemma (Pumping-Eigenschaft notwendig, nicht hinreichend)
- Der Satz von Myhill und Nerode: L regulär g.d.w. $\mathit{Index}(\sim_L) < \infty$
- Nichtregularität nachweisen: Pumping-Lemma oder $\mathit{Index}(\sim_L) = \infty$
- Äquivalenzklassenautomat und Minimierung von DFAs
- Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen
- Entscheidbarkeitsresultate für reguläre Sprachen