LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Minimierung von deterministischen endlichen Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 16. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Äquivalenzklassenautomat

Definition (Äquivalenzklassenautomat)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Wir nennen zwei Zustände $z, z' \in Z$ äquivalent und schreiben $z \equiv z'$ falls gilt: für alle $w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E$. Der Äquivalenzklassenautomat zu M ist der DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ mit

$$
\begin{aligned}
Z' &= \{[z]_\equiv \mid z \in Z\} \\
z'_0 &= [z_0]_\equiv \\
E' &= \{[z]_\equiv \mid z \in E\} \\
\delta'([z]_\equiv, a) &= [\delta(z, a)]_\equiv
\end{aligned}
$$

Äquivalenzklassenautomat: Korrektheit und Minimalität

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z vom Startzustand z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal.

Beweis (nur Teil 1):

Äquivalenzklassenautomat: Korrektheit und Minimalität

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z vom Startzustand z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal.

Beweis (nur Teil 1): Sei $w \in \Sigma^*$. Dann gilt:

- M durchläuft die Zustandsfolge $q_0, \ldots, q_{|w|}$ entlang w und akzeptiert w g.d.w. $q_{|w|} \in E$ gilt.

Äquivalenzklassenautomat: Korrektheit und Minimalität

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z vom Startzustand z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal.

Beweis (nur Teil 1): Sei $w \in \Sigma^*$. Dann gilt:

- M durchläuft die Zustandsfolge $q_0, \ldots, q_{|w|}$ entlang w und akzeptiert w g.d.w. $q_{|w|} \in E$ gilt.
- M' durchläuft die Zustandsfolge $[q_0]_\equiv, \ldots, [q_{|w|}]_\equiv$ und akzeptiert w g.d.w. $[q_{|w|}]_\equiv \in E'$ gilt.

Äquivalenzklassenautomat: Korrektheit und Minimalität

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z vom Startzustand z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal.

Beweis (nur Teil 1): Sei $w \in \Sigma^*$. Dann gilt:

- M durchläuft die Zustandsfolge $q_0, \ldots, q_{|w|}$ entlang w und akzeptiert w g.d.w. $q_{|w|} \in E$ gilt.
- M' durchläuft die Zustandsfolge $[q_0]_\equiv, \ldots, [q_{|w|}]_\equiv$ und akzeptiert w g.d.w. $[q_{|w|}]_\equiv \in E'$ gilt.

Da per Definition $[q_{|w|}]_\equiv \in E'$ genau dann gilt, wenn $q_{|w|} \in E$ gilt, folgt, dass M und M' dieselben Wörter akzeptieren. □

Zustandsminimierung von DFAs

Schritte:

A. Entferne nicht erreichbare Zustände.
B. Berechne äquivalente Zustände (bezüglich $\equiv$).
C. Bilde Äquivalenzklassenautomat, indem äquivalente Zustände verschmolzen werden.

Zustandsminimierung von DFAs

Schritte:

A. Entferne nicht erreichbare Zustände.

B. Berechne äquivalente Zustände (bezüglich $\equiv$).

C. Bilde Äquivalenzklassenautomat, indem äquivalente Zustände verschmolzen werden.

Berechnung äquivalenter Zustände

Schritte:

Berechnung äquivalenter Zustände

Schritte:

1. Markiere Paare von Zuständen, die verschieden sein müssen.
   Markiere initial alle $\{z, z'\}$ mit $z \in E$, $z' \notin E$.

Berechnung äquivalenter Zustände

Schritte:

1. Markiere Paare von Zuständen, die verschieden sein müssen.
   Markiere initial alle $\{z, z'\}$ mit $z \in E$, $z' \notin E$.
2. Vervollständige das Markieren durch Untersuchen von Übergängen:
   2.1 Wenn $\{z, z'\}$ noch nicht markiert:
   Prüfe für jedes $a \in \Sigma$, ob die beiden Nachfolger $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ markiert sind.
   2.2 Falls ja, dann markiere $\{z, z'\}$.
   2.3 Wiederhole, bis sich nichts mehr ändert.

Berechnung äquivalenter Zustände

Schritte:

1. Markiere Paare von Zuständen, die verschieden sein müssen.
   Markiere initial alle $\{z, z'\}$ mit $z \in E$, $z' \notin E$.
2. Vervollständige das Markieren durch Untersuchen von Übergängen:
   2.1 Wenn $\{z, z'\}$ noch nicht markiert:
   Prüfe für jedes $a \in \Sigma$, ob die beiden Nachfolger $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ markiert sind.
   2.2 Falls ja, dann markiere $\{z, z'\}$.
   2.3 Wiederhole, bis sich nichts mehr ändert.
3. Alle am Ende unmarkierten Paare sind äquivalente Zustände.

Algorithmus 3: Berechnung aller äquivalenten Zustände

Eingabe: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, der keine unerreichbaren Zustände hat
Ausgabe: Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$ für die gilt $z \equiv z'$
Beginn
  stelle Tabelle T aller Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$ und $z, z' \in Z$ auf;
  markiere alle Paare $\{z, z'\}$ in T mit $z \in E$ und $z' \notin E$;
  wiederhole
    für jedes *unmarkierte Paar* $\{z, z'\}$ *in* T **tue**
      für jedes $a \in \Sigma$ **tue**
        wenn $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ *in* T *markiert ist* **dann**
          markiere $\{z, z'\}$ in T;
        Ende
      Ende
    Ende
  bis *sich* T *nicht mehr verändert*;
  return $\{\{z, z'\} \mid \{z, z'\}$ *ist nicht markiert in* $T\}$
Ende

Korrektheit (1)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Korrektheit (1)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis:

- Teil 1: Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.
- Teil 2: Wenn $z \not\equiv z'$, dann wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert.

Korrektheit (2)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 1): Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.

Korrektheit (2)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 1): Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.

- Wir zeigen: Für jedes markierte Paar $\{z, z'\}$ gibt es Wort w mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.

Korrektheit (2)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat. Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 1): Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.

- Wir zeigen: Für jedes markierte Paar $\{z, z'\}$ gibt es Wort w mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.
- Induktion über Anzahl Schleifeniterationen bis $\{z, z'\}$ markiert wird.

Korrektheit (2)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 1): Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.

- Wir zeigen: Für jedes markierte Paar $\{z, z'\}$ gibt es Wort w mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.
- Induktion über Anzahl Schleifeniterationen bis $\{z, z'\}$ markiert wird.
- Basis: 0 Iterationen, $\{z, z'\}$ wird vor der Schleife markiert, $w = \varepsilon$ erfüllt Behauptung.

Korrektheit (2)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 1): Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.

- Wir zeigen: Für jedes markierte Paar $\{z, z'\}$ gibt es Wort w mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.
- Induktion über Anzahl Schleifeniterationen bis $\{z, z'\}$ markiert wird.
- Basis: 0 Iterationen, $\{z, z'\}$ wird vor der Schleife markiert, $w = \varepsilon$ erfüllt Behauptung.
- Schritt: Mehr als 0 Iterationen. Dann wird $\{z, z'\}$ markiert, weil es $a \in \Sigma$ und ein markiertes Paar $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ gibt. Induktionsannahme liefert Wort w' mit $\neg(\widehat{\delta}(\delta(z, a), w') \in E \iff \widehat{\delta}(\delta(z', a), w') \in E)$.

Korrektheit (2)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat. Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 1): Wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert, dann gilt $z \not\equiv z'$.

- Wir zeigen: Für jedes markierte Paar $\{z, z'\}$ gibt es Wort w mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.
- Induktion über Anzahl Schleifeniterationen bis $\{z, z'\}$ markiert wird.
- Basis: 0 Iterationen, $\{z, z'\}$ wird vor der Schleife markiert, $w = \varepsilon$ erfüllt Behauptung.
- Schritt: Mehr als 0 Iterationen. Dann wird $\{z, z'\}$ markiert, weil es $a \in \Sigma$ und ein markiertes Paar $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ gibt. Induktionsannahme liefert Wort w' mit $\neg(\widehat{\delta}(\delta(z, a), w') \in E \iff \widehat{\delta}(\delta(z', a), w') \in E)$.
- Mit $w = aw'$ folgt: $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.

Korrektheit (3)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 2): Wenn $z \not\equiv z'$, dann wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert.

Korrektheit (3)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 2): Wenn $z \not\equiv z'$, dann wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert.

- Beweis durch Widerspruch. Annahme es gibt Paare $z \not\equiv z'$, die der Algorithmus nicht markiert. O.B.d.A. können wir ein Paar $\{z, z'\}$ wählen, für welches es ein minimal langes Wort w gibt mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.

Korrektheit (3)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 2): Wenn $z \not\equiv z'$, dann wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert.

- Beweis durch Widerspruch. Annahme es gibt Paare $z \not\equiv z'$, die der Algorithmus nicht markiert. O.B.d.A. können wir ein Paar $\{z, z'\}$ wählen, für welches es ein minimal langes Wort w gibt mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.
- Wenn $w = \varepsilon$, dann wird $\{z, z'\}$ vor der Schleife markiert. Widerspruch.

Korrektheit (3)

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat. Algorithmus 3 berechnet äquivalente Zustandspaare von M und es gibt keine weiteren äquivalenten Paare.

Beweis (Teil 2): Wenn $z \not\equiv z'$, dann wird das Paar $\{z, z'\}$ markiert.

- Beweis durch Widerspruch. Annahme es gibt Paare $z \not\equiv z'$, die der Algorithmus nicht markiert. O.B.d.A. können wir ein Paar $\{z, z'\}$ wählen, für welches es ein minimal langes Wort w gibt mit $\neg(\widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E)$.
- Wenn $w = \varepsilon$, dann wird $\{z, z'\}$ vor der Schleife markiert. Widerspruch.
- Wenn $w = aw'$ mit $a \in \Sigma$, dann gilt: Wenn $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ vom Algorithmus markiert wird, dann auch $\{z, z'\}$. Daher: $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ wird nicht markiert. Aber dann gilt für w': $\neg\left(\widehat{\delta}(\delta(z, a), w') \in E \iff \widehat{\delta}(\delta(z', a), w') \in E\right)$, d.h. $\delta(z, a) \not\equiv \delta(z', a)$, und $|w'| < |w|$. Widerspruch zur Minimalität von $\{z, z'\}$. $\square$

Laufzeit

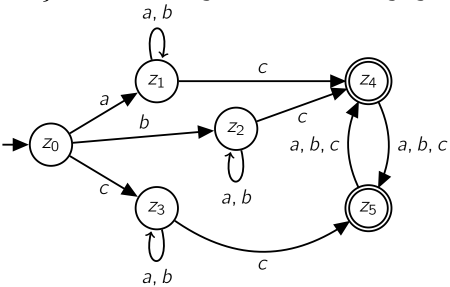
- Darstellung der Tabelle T:
  zweidimensionales Array der Größe $O(|Z| \times |Z|)$
- Ermöglicht konstanten Zugriff auf Markierungen
- Pro Durchlauf der Schleife: $O(|Z|^2 \cdot |\Sigma|)$
- Anzahl der Durchläufe ist durch $|Z|^2$ begrenzt, da es nur $|Z|^2$ Paare gibt und mindestens 1 Paar pro Durchlauf markiert wird
- Restliche Schritte: Konstante Laufzeit
- Daher: Algorithmus 3 kann in Zeit $O(|Z|^4 \cdot |\Sigma|)$ implementiert werden
- Tatsächlich gibt es effizientere Implementierungen

Algorithmus 4: Minimierung von DFAs

Eingabe: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$
Ausgabe: Minimaler DFA M' mit $L(M) = L(M')$
Beginn
  entferne Zustände aus M, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind;
  berechne äquivalente Zustände mit Algorithmus 3;
  erzeuge den Äquivalenzklassenautomat, indem die berechneten äquivalenten Zustände verschmolzen werden;
Ende

Beispiel zur Minimierung

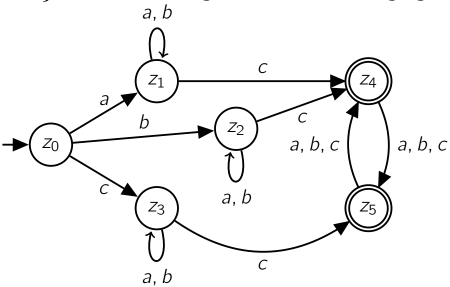
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und der folgende DFA M gegeben:



- alle Zustände sind von z_0 aus erreichbar

Beispiel zur Minimierung

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und der folgende DFA M gegeben:

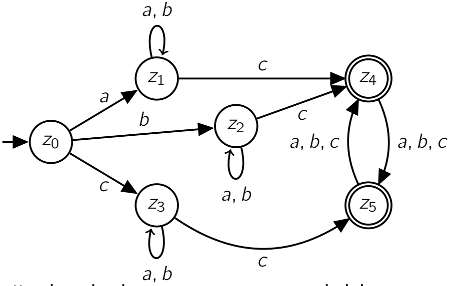


z_1					
z_2					
z_3					
z_4					
z_5					
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

- alle Zustände sind von z_0 aus erreichbar
- äquivalente Zustände berechnen: Tabelle T erstellen

Beispiel zur Minimierung

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und der folgende DFA M gegeben:

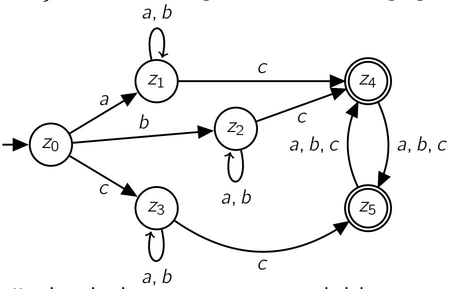


z_1					
z_2					
z_3					
z_4	X	X	X	X	
z_5	X	X	X	X	
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

- alle Zustände sind von z_0 aus erreichbar
- äquivalente Zustände berechnen: Tabelle T erstellen
- Initiales Markieren: $\{z, z'\}$ mit $z \in \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ und $z' \in \{z_4, z_5\}$

Beispiel zur Minimierung

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und der folgende DFA M gegeben:



z_1	X				
z_2	X				
z_3	X				
z_4	X	X	X	X	
z_5	X	X	X	X	
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

- alle Zustände sind von z_0 aus erreichbar
- äquivalente Zustände berechnen: Tabelle T erstellen
- Initiales Markieren: $\{z, z'\}$ mit $z \in \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ und $z' \in \{z_4, z_5\}$
- $\{z_0, z_1\}$, da $\{\delta(z_0, c), \delta(z_1, c)\} = \{z_3, z_4\}$ bereits markiert ist,
- $\{z_0, z_2\}$, da $\{\delta(z_0, c), \delta(z_2, c)\} = \{z_3, z_4\}$ bereits markiert ist, und
- $\{z_0, z_3\}$, da $\{\delta(z_0, c), \delta(z_3, c)\} = \{z_3, z_5\}$ bereits markiert

Beispiel zur Minimierung (2)

z_1	X				
z_2	X				
z_3	X				
z_4	X	X	X	X	
z_5	X	X	X	X	
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4

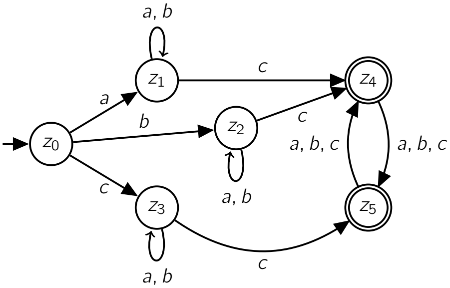
Ergibt $z_1 \equiv z_3$, $z_1 \equiv z_2$, $z_2 \equiv z_3$, $z_4 \equiv z_5$ und daher die Äquivalenzklassen

$$[z_0]_\equiv = \{z_0\}$$
$$[z_1]_\equiv = \{z_1, z_2, z_3\}$$
$$[z_4]_\equiv = \{z_4, z_5\}$$

Beispiel zur Minimierung (2)

$$[z_0]_\equiv = \{z_0\}$$
$$[z_1]_\equiv = \{z_1, z_2, z_3\}$$
$$[z_4]_\equiv = \{z_4, z_5\}$$

Der Minimalautomat zu



ist hiermit