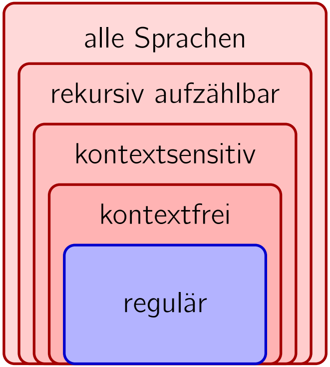
Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 9. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

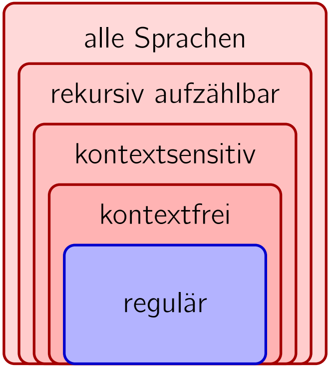
Hintergrund zum Pumping-Lemma



Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

- endliche Automaten
- reguläre Grammatiken
- reguläre Ausdrücke

Hintergrund zum Pumping-Lemma



Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

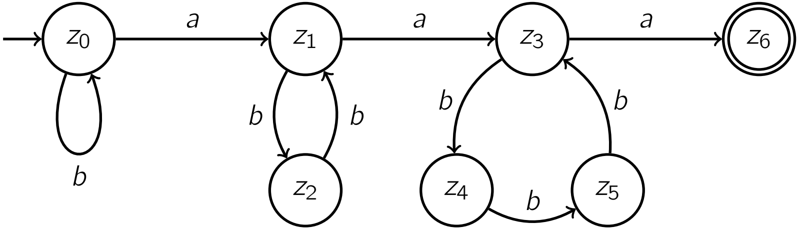
- endliche Automaten
- reguläre Grammatiken
- reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man, dass eine formale Sprache **nicht regulär** ist?

$\Rightarrow$ Das Pumping-Lemma ist ein Werkzeug dafür.

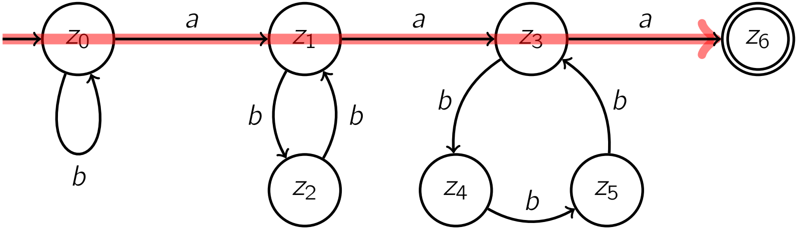
Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:



Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

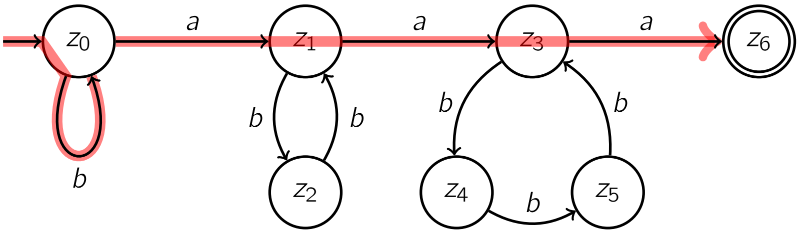
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

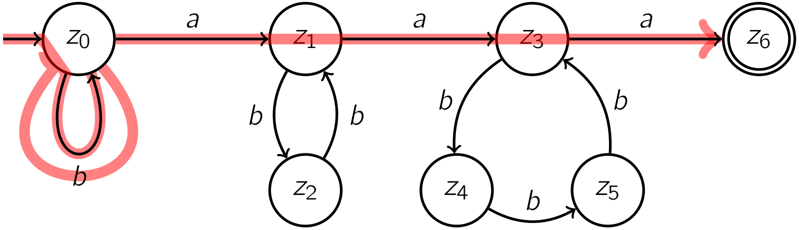
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

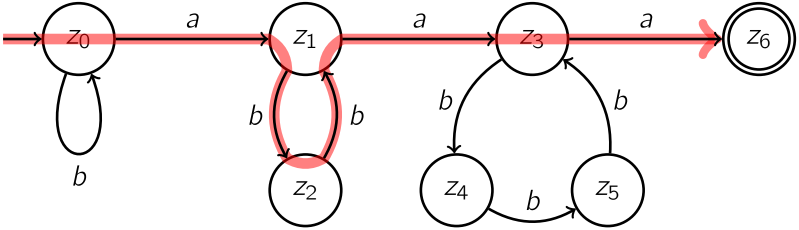
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

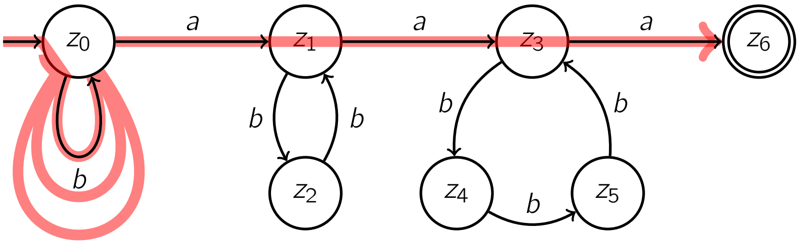
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5,

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

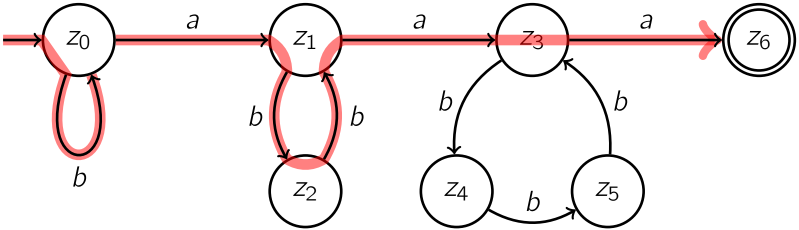
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

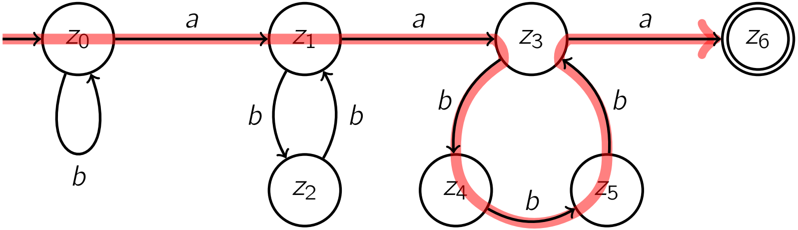
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

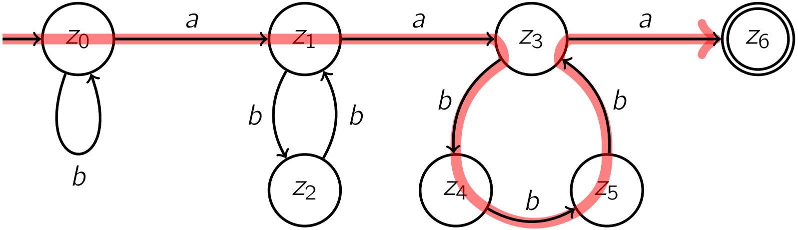
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

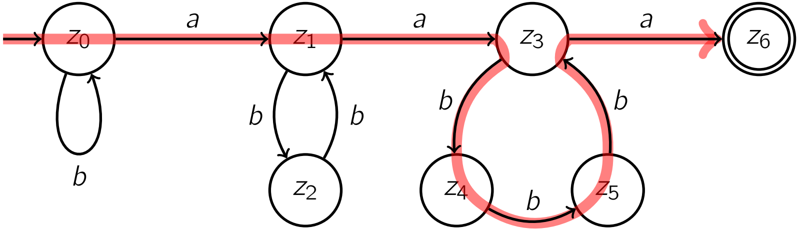
Beispiel: DFA M:



- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

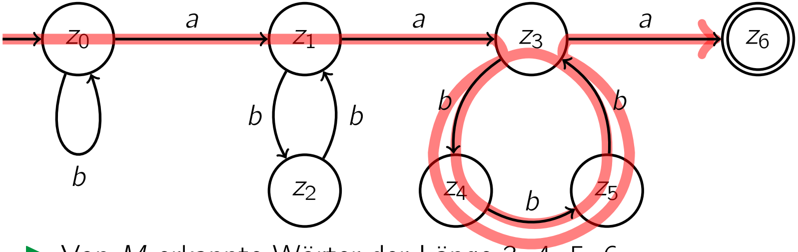


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**
und verbleiben in der Sprache $L(M)$

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

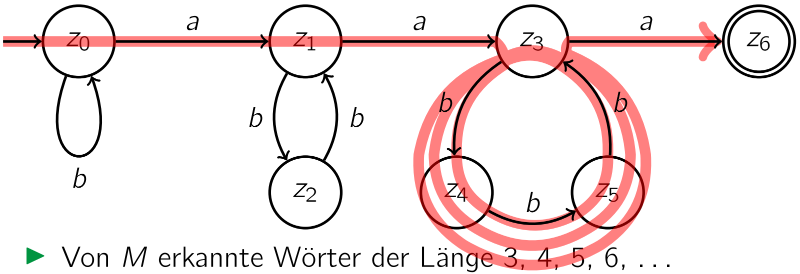


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**
und verbleiben in der Sprache $L(M)$

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

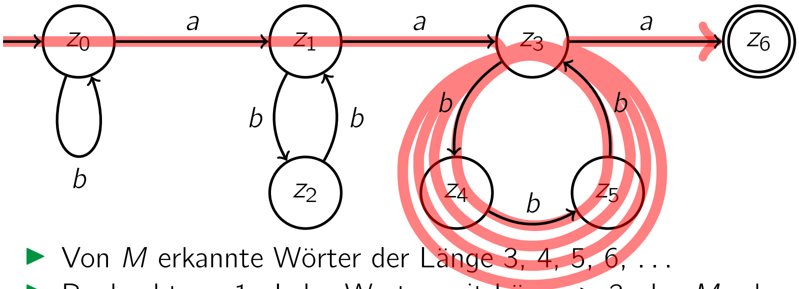


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**
und verbleiben in der Sprache $L(M)$

Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA M:

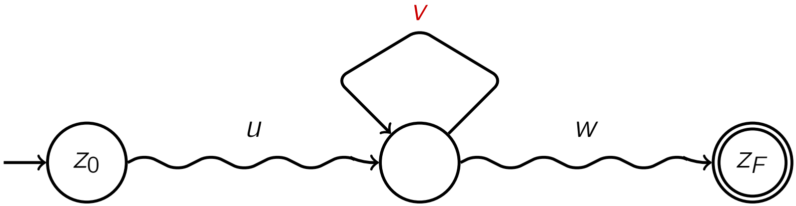


- Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort z mit Länge > 3, das M erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir **aufpumpen**
und verbleiben in der Sprache $L(M)$

Idee des Pumping-Lemmas: allgemeiner

Gilt das allgemein?



- Wenn ein endlicher Automat n **Zustände** hat,
  dann müssen akzeptierte Wörter der **Länge** $\geq n$ eine Schleife durchlaufen
- Diese Wörter kann man aufpumpen: uvw, $uvvw$, $uvvvw$, ...
  Allgemein: uv^iw für $i = 0, 1, 2, \ldots$ liegen in der erkannten Sprache

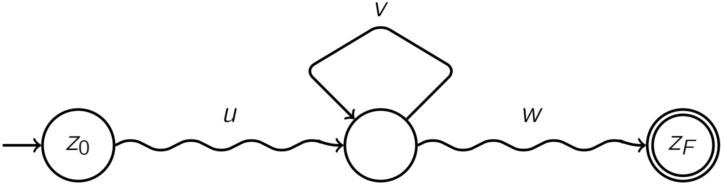
Das Pumping-Lemma

Lemma 4.9.1 (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache L hat die folgende Pumping-Eigenschaft:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^i w \in L$.

Die Zahl n nennt man die Pumping-Konstante der Sprache L.



Beweis des Pumping-Lemmas (1)

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert mit $n = |Z|$.

Beweis des Pumping-Lemmas (1)

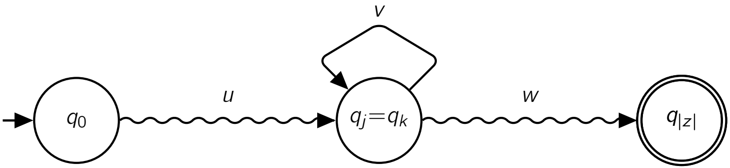
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert mit $n = |Z|$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$. Jeder Lauf für z besucht $|z| + 1$ Zustände.
  Sei $q_0, q_1, \ldots q_{|z|}$ die besuchte Folge mit $q_0 = z_0$ und $q_{|z|} \in E$.

Beweis des Pumping-Lemmas (1)

- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert mit $n = |Z|$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$. Jeder Lauf für z besucht $|z| + 1$ Zustände.
  Sei $q_0, q_1, \ldots q_{|z|}$ die besuchte Folge mit $q_0 = z_0$ und $q_{|z|} \in E$.
- Da $|Z| = n$, wird spätestens nach Lesen von n Zeichen ein Zustand erneut besucht.

Beweis des Pumping-Lemmas (1)

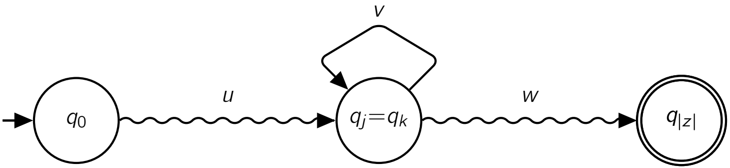
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der L akzeptiert mit $n = |Z|$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$. Jeder Lauf für z besucht $|z| + 1$ Zustände.
  Sei $q_0, q_1, \ldots q_{|z|}$ die besuchte Folge mit $q_0 = z_0$ und $q_{|z|} \in E$.
- Da $|Z| = n$, wird spätestens nach Lesen von n Zeichen ein Zustand erneut besucht.
- Sei q_k (mit $k \leq n$) der erste Zustand, der bereits besucht wurde.
  D.h. es gibt $j < k$, sodass $q_k = q_j$ und k ist minimal, $z = uvw$ mit



Beweis des Pumping-Lemmas (2)

...

D.h. es gibt $j < k$, sodass $q_k = q_j$ und k ist minimal, $z = uvw$ mit



Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- Aus $j < k$ folgt $|v| \geq 1$.
- Aus $k \leq n$ folgt $|uv| \leq n$.
- Für $i = 0$: Aus $q_j = q_k$ folgt $\widehat{\delta}(q_0, u) = q_j = \widehat{\delta}(q_0, uv) = q_k$ und somit $\widehat{\delta}(q_0, uw) = \widehat{\delta}(q_0, uvw) = q_{|z|} \in E$, d.h. $uv^0w \in L(M)$.
  Sei $i > 0$. Aus $\widehat{\delta}(q_j, v) = q_k = q_j$ folgt $\widehat{\delta}(q_j, v^i) = q_j$ und daher $\widehat{\delta}(q_0, uv^iw) = \widehat{\delta}(q_k, v^iw) = \widehat{\delta}(q_j, w) = q_{|z|} \in E$. Daher gilt $uv^iw \in L(M)$. $\square$

Endliche Sprachen

Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}_{>0}\colon \forall z \in L\colon(|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w\colon(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0\colon(uv^iw \in L)))$$

Endliche Sprachen

Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}_{>0}\colon \forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w{:}(z{=}uvw \land |uv| \leq n \land |v| \geq 1 \land \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))$$

Warum erfüllen **endliche Sprachen** das Pumping-Lemma?

Endliche Sprachen

Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iw \in L$.

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}_{>0}\colon \forall z \in L\colon (|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w\colon (z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0\colon (uv^iw \in L)))$$

Warum erfüllen **endliche Sprachen** das Pumping-Lemma?

Wähle n größer als die Länge des längsten Worts

Anwendung des Pumping-Lemmas

- Pumping-Lemma:
  Sprache regulär $\Longrightarrow$ Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft
- Zeige, dass eine Sprache nicht regulär ist, durch Kontraposition:

Sprache erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft
$\Longrightarrow$ Sprache ist **nicht** regulär

Umformung der negierten Pumping-Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
& \neg(\exists n \in \mathbb{N}_{>0}{:}\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}\neg(\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(\neg(|z| \geq n) \vee (\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge \neg(\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \vee \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \exists i \geq 0{:}uv^iw \notin L))))
\end{aligned}
$$

Umformung der negierten Pumping-Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
& \neg(\exists n \in \mathbb{N}_{>0}{:}\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}\neg(\forall z \in L{:}(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(|z| \geq n \Rightarrow \exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}(\neg(\neg(|z| \geq n) \vee (\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge \neg(\exists u,v,w{:}(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0{:}(uv^iw \in L)))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}(\neg(z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \vee \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \neg(\forall i \geq 0{:}uv^iw \in L))))) \\
\longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N}_{>0}{:}(\exists z \in L{:}((|z| \geq n) \wedge (\forall u,v,w{:}((z{=}uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \exists i \geq 0{:}uv^iw \notin L))))
\end{aligned}
$$

Formale Sprache L erfüllt nicht die Pumping-Eigenschaft:

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$,
sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit

- $|uv| \leq n$ und
- $|v| \geq 1$

ein $i \geq 0$ existiert mit $uv^iw \notin L$.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

Anwendung des Pumping-Lemmas

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^n b^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).

Anwendung des Pumping-Lemmas

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^n b^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).
- Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z,
  sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht erfüllt und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass L nicht regulär ist:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Wir wählen $z \in L$:
  $z = a^n b^n$ (damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt).
- Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z,
  sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Dann ist $u = a^r, v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s \geq 1$ und $w = a^t b^n$ mit $r + s + t = n$.
  Daher können wir z.B. $i = 2$ wählen und erhalten
  $uv^i w = uv^2 w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$, da $s > 0$. $\square$

Beweise Nichtregularität als Spiel

Sei L die formale Sprache.

1. Der **Gegner** wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. **Wir** wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Der **Gegner** wählt Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \geq 0$ angeben können, sodass $uv^iw \notin L$.

Wenn wir das Spiel **für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners** gewinnen, dann haben wir die Nichtregularität von L nachgewiesen.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit p ist die nächste Primzahl, die größer gleich n ist.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit p ist die nächste Primzahl, die größer gleich n ist.
3. Der Gegner wählt Zerlegung $u = a^r$, $v = a^s$, $w = a^t$ mit $uvw = a^p$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ (und damit $s \geq 1$).

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$ mit p ist die nächste Primzahl, die größer gleich n ist.
3. Der Gegner wählt Zerlegung $u = a^r$, $v = a^s$, $w = a^t$ mit $uvw = a^p$, $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ (und damit $s \geq 1$).
4. Wir wählen $i = p + 1$. Dann ist $uv^iw \notin L$, denn $uv^iw = a^r(a^s)^{p+1}a^t = a^{r+s\cdot(p+1)+t} = a^{r+s\cdot p+s+t} = a^{s\cdot p+p} = a^{p\cdot(s+1)}$ und für $s \geq 1$ folgt, dass $p \cdot (s+1)$ keine Primzahl sein kann. $\square$

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.
3. Sei $z = uvw$ vom Gegner zerlegt, sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$.
3. Sei $z = uvw$ vom Gegner zerlegt, sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. Wir wählen $i = 2$, d.h. wir betrachten $uv^2w = a^k$.
   - $1 + n^2 \leq k$ (denn $|v| \geq 1$)
   - $k \leq n^2 + n$ (denn $|uv| \leq n$ und daher $|v| \leq n$)

   D.h. wir haben $n^2 < k < n^2 + n = (n+1) \cdot n < (n+1)^2$.
   Dann kann k keine Quadratzahl sein.
   Daher gilt $uv^2w \notin L$.
   Das Pumping-Lemma zeigt somit, dass L nicht regulär ist. $\square$

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$ das Wort $z = a^{2^n}$.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| = k \geq 1$.
- Dann ist $1 \leq k \leq n$ und $uv^2w = a^{2^n+k}$ und $2^n + k \neq 2^\ell$ da $2^n + k < 2^{n+1} = 2^n + 2^n$ denn $k \leq n < 2^n$.
  Daher ist $uv^2w \notin L$.

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge n.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge n.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Beispiel

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ als Wort mit Mindestlänge n.
- Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
- Dann ist $uv^0w = a^k b a^n$ mit $k = n - |v| < n$ kein Palindrom.

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Wir wählen $n = 1$.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Wir wählen $n = 1$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Wir wählen $n = 1$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- Da z von der Form $a^k b^\ell c^\ell$ ist, dann muss $k > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{k-1} b^\ell c^\ell$. Da $|v| = 1, |uv| \leq n$ und $uv^i w = a^{k+i-1} b^\ell c^\ell \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$, erfüllt L die Pumping-Eigenschaft.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

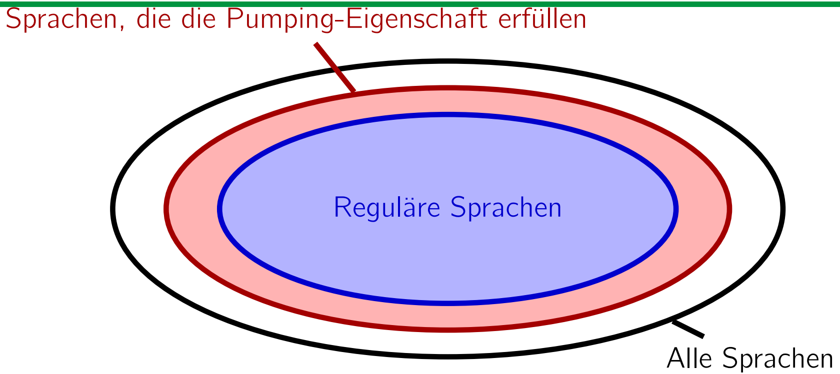
Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache $L = \{a^k b^\ell c^\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

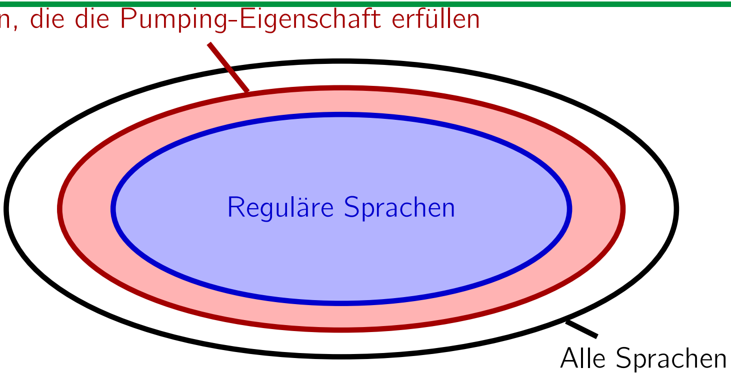
- Wir wählen $n = 1$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- Da z von der Form $a^k b^\ell c^\ell$ ist, dann muss $k > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{k-1} b^\ell c^\ell$. Da $|v| = 1, |uv| \leq n$ und $uv^i w = a^{k+i-1} b^\ell c^\ell \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$, erfüllt L die Pumping-Eigenschaft.

Beweis, dass L nicht regulär ist folgt **später** (nur FSK).

Mengendiagramm



Mengendiagramm



Wichtige Konsequenz

Das Pumping-Lemma kann <u>nicht</u> verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

Zusammenfassung Pumping-Lemma

- Das Pumping-Lemma formuliert **eine notwendige Bedingung** für **reguläre** Sprachen:

  Sehr informell:

  Wörter einer regulären Sprache können aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.

- Anwendung:

  L erfüllt die **Pumping-Eigenschaft nicht** $\Longrightarrow$ L **nicht regulär**

- Das Pumping-Lemma gibt **keine hinreichende Bedingung** für reguläre Sprachen, d.h. Regularität kann **nicht** mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.
- Nichtregularität widerlegen funktioniert nicht in jedem Fall mit dem Pumping-Lemma.