Nichtdeterministische endliche Automaten und ε-Übergänge

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 3. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Wiederholung: NFA

Definition (NFA)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat
(nondeterministic finite automaton, NFA) ist ein 5-Tupel $(Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$,
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände und
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Wiederholung: DFAs & NFAs sind Formalismen für Typ 3-Sprachen

Theorem 4.5.4

DFAs bzw. NFAs erkennen **genau** die regulären Sprachen.

Beachte: Determinisierung von NFA mit Potenzmengenkonstruktion

Größe des DFAs vs. NFAs (1)

- Sei M ein NFA mit n Zuständen.
- Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände.
  D.h. der Platz explodiert uns.
- Frage: Geht es besser (unsere Kodierung ist zu einfach) oder nicht?
- Das folgende Lemma zeigt, dass es nicht wirklich besser geht.

Größe des DFAs vs. NFAs (2)

Lemma

Sei $L = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$
(Sprache aller Wörter aus $\{a,b\}^*$, die an n-letzter Stelle ein a haben).

- Es gibt NFA M mit $L(M) = L$ und M hat $n+1$ Zustände.
- Jeder DFA M' mit $L(M') = L$, hat mindestens 2^n Zustände.

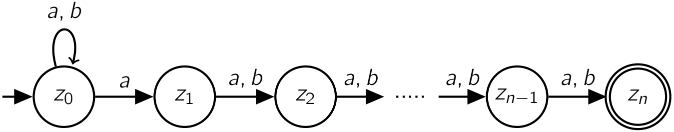
Größe des DFAs vs. NFAs (2)

Lemma

Sei $L = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$
(Sprache aller Wörter aus $\{a,b\}^*$, die an n-letzter Stelle ein a haben).

- Es gibt NFA M mit $L(M) = L$ und M hat $n+1$ Zustände.
- Jeder DFA M' mit $L(M') = L$, hat mindestens 2^n Zustände.

Beweis (Teil 1): Sei M der folgende NFA:



$L(M) = L$, denn:

- zum Akzeptieren müssen $z_0, z_1, \ldots z_n$ nacheinander durchlaufen werden, was genau mit Wörtern av mit $v \in \{a,b\}^{n-1}$ möglich ist.
- In z_0 kann zuvor jedes $u \in \{a,b\}^*$ gelesen werden (Verbleib in z_0).

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z$.

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z$.
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z$.
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist w von der Form $av \in L$ und w' ist von der Form $bv' \notin L$ (oder umgekehrt), daher $z \in E$ und $z \notin E$ müssten gleichzeitig gelten.
  Widerspruch.

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z$.
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist w von der Form $av \in L$ und w' ist von der Form $bv' \notin L$ (oder umgekehrt), daher $z \in E$ und $z \notin E$ müssten gleichzeitig gelten. **Widerspruch.**

  Falls $j > 1$: w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$.

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z$.
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist w von der Form $av \in L$ und w' ist von der Form $bv' \notin L$ (oder umgekehrt), daher $z \in E$ und $z \notin E$ müssten gleichzeitig gelten. **Widerspruch.**

  Falls $j > 1$: w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$. Sei $w_2 = wb^{j-1} = uavb^{j-1}$ und $w_2' = w'b^{j-1} = ubv'b^{j-1}$. Da $\widehat{\delta}(uav) = \widehat{\delta}(ubv') = z$, muss dann gelten $\widehat{\delta}(w_2) = \widehat{\delta}(w_2') = z'$.

Größe des DFAs vs. NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z$.
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist w von der Form $av \in L$ und w' ist von der Form $bv' \notin L$ (oder umgekehrt), daher $z \in E$ und $z \notin E$ müssten gleichzeitig gelten. **Widerspruch.**

  Falls $j > 1$: w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$. Sei $w_2 = wb^{j-1} = uavb^{j-1}$ und $w_2' = w'b^{j-1} = ubv'b^{j-1}$. Da $\widehat{\delta}(uav) = \widehat{\delta}(ubv') = z$, muss dann gelten $\widehat{\delta}(w_2) = \widehat{\delta}(w_2') = z'$. Aber $w_2 \in L$ aber $w_2' \notin L$, daher $z' \in E$ und $z' \notin E$. **Widerspruch.** $\square$

NFAs mit ε-Übergängen

- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens (es wird sozusagen das leere Wort ε gelesen).
- Ausdruckskraft ändert sich mit ε-Übergängen nicht.
- ε-Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

NFAs mit ε-Übergängen

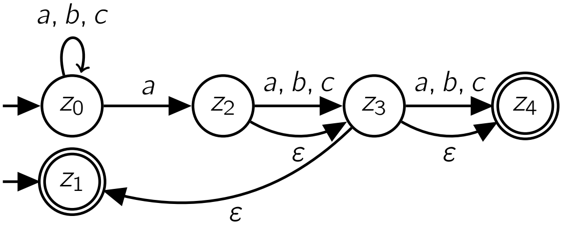
- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens (es wird sozusagen das leere Wort ε gelesen).
- Ausdruckskraft ändert sich mit ε-Übergängen nicht.
- ε-Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

Definition (NFA mit ε-Übergängen)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit ε-Übergängen (NFA mit ε-Übergängen) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

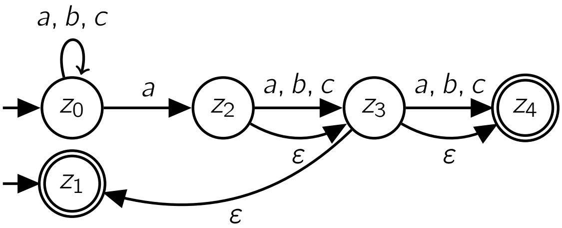
- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$,
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände und
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Beispiel: NFA mit ε-Übergängen



Akzeptierte Sprache: ?

Beispiel: NFA mit ε-Übergängen



Akzeptierte Sprache:

alle Wörter aus $\{a, b, c\}^*$, die an letzter, vorletzter oder drittletzter Postion ein a haben, und das leere Wort

ε-Hülle

„Die ε-Hülle fügt für einen Zustand oder eine Zustandsmenge alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.“

ε-Hülle

„Die ε-Hülle fügt für einen Zustand oder eine Zustandsmenge alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.“

Definition (ε-Hülle)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen. Die ε-Hülle $clos_\varepsilon(z)$ eines Zustands $z \in Z$ ist induktiv definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $z \in clos_\varepsilon(z)$.
2. Wenn $z' \in clos_\varepsilon(z)$ und $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$, dann ist auch $z'' \in clos_\varepsilon(z)$.

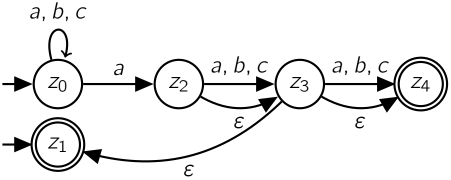
Für eine Zustandsmenge $X \subseteq Z$ definieren wir $clos_\varepsilon(X) := \bigcup_{z \in X} clos_\varepsilon(z)$.

ε-Hülle (2)

Die ε-Hülle für eine Zustandsmenge $X \subseteq Z$ kann auch berechnet werden durch

$$clos_\varepsilon(X) := \begin{cases} X, & \text{wenn } \bigcup_{z \in X} \delta(z, \varepsilon) \subseteq X \\ clos_\varepsilon(X \cup \bigcup_{z \in X} \delta(z, \varepsilon)), & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
clos_\varepsilon(z_0) &= \{z_0\} \\
clos_\varepsilon(z_1) &= \{z_1\} \\
clos_\varepsilon(z_4) &= \{z_4\} \\
clos_\varepsilon(z_3) &= \{z_1, z_3, z_4\} \\
clos_\varepsilon(z_2) &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}
\end{aligned}
$$

NFA mit ε-Übergängen: Akzeptierte Sprache

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε-Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \widetilde{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z, a)), w) \text{ für alle } X \subseteq Z \end{aligned}$$

NFA mit ε-Übergängen: Akzeptierte Sprache

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε-Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\
\widetilde{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z, a)), w) \text{ für alle } X \subseteq Z
\end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset\}$$

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren **genau** die regulären Sprachen.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren **genau** die regulären Sprachen.

Beweis:

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren die regulären Sprachen:

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren **genau** die regulären Sprachen.

Beweis:

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren die regulären Sprachen:
  - Jede reguläre Sprache wird von einem NFA (ohne ϵ-Übergänge) akzeptiert.
  - Transformiere diesen NFA in einen NFA mit ε-Übergängen:

    Setze $\delta(z, \varepsilon) = \emptyset$ für alle Zustände z.

    Offensichtlich ist die akzeptierte Sprache diesselbe.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:

  Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:

  Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

  - Konstruiere NFA M' mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M)$ regulär.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:

  Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

  - Konstruiere NFA M' mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M)$ regulär.
  - $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:

  Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

  - Konstruiere NFA M' mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M)$ regulär.
  - $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

  $L(M) = L(M')$, d.h. $w \in L(M) \iff w \in L(M')$:

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:

  Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

  - Konstruiere NFA M' mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M)$ regulär.
  - $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

  $L(M) = L(M')$, d.h. $w \in L(M) \iff w \in L(M')$:

  - Wir wollen zeigen $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset \iff \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset$ für alle $w \in \Sigma^*$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:

  Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
  - Konstruiere NFA M' mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M)$ regulär.
  - $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

  $L(M) = L(M')$, d.h. $w \in L(M) \iff w \in L(M')$:
  - Wir wollen zeigen $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset \iff \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset$ für alle $w \in \Sigma^*$.
  - Wir zeigen die Verallgemeinerung $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), w) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ und $X \subseteq Z$. Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:
  - ...
  - Wir zeigen die Verallgemeinerung $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), w) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ und $X \subseteq Z$. Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:
  - ...
  - Wir zeigen die Verallgemeinerung $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), w) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ und $X \subseteq Z$. Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.
  - Basis: $w = \varepsilon$. Dann gilt $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon) = clos_\varepsilon(X) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon)$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

- NFAs mit ϵ-Übergängen akzeptieren nur reguläre Sprachen:
  - ...
  - Wir zeigen die Verallgemeinerung $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), w) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ und $X \subseteq Z$. Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.
  - Basis: $w = \varepsilon$. Dann gilt $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon) = clos_\varepsilon(X) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon)$.
  - Schritt: Sei $w = au$ mit $a \in \Sigma$. Wir formen um:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), au) &\overset{\text{Def. } \widetilde{\delta}}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z,a)), u) \overset{\text{I.H.}}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(\delta(z,a)), u) \\ &\overset{\text{Def. } \delta'}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widehat{\delta'}(\delta'(z,a), u) \overset{\text{Def. } \widehat{\delta}}{=} \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), au)\end{aligned}$$

$\square$

  - *Zur Erinnerung:*
    $\widetilde{\delta}(X, au) := \bigcup_{z \in X} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z,a)), u)$
    $\delta'(z,a) := clos_\varepsilon(\delta(z,a))$
    $\widehat{\delta}(X, au) := \bigcup_{z \in X} \widehat{\delta}(\delta(z,a), u)$