

# Determinisierung von endlichen Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik

Stand: 3. Mai 2023

Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel



## Definition (NFA)

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat**

(nondeterministic finite automaton, NFA) ist ein 5-Tupel  $(Z, \Sigma, \delta, S, E)$  wobei

- ▶  $Z$  ist eine endliche Menge von **Zuständen**,
- ▶  $\Sigma$  ist das (endliche) **Eingabealphabet** mit  $Z \cap \Sigma = \emptyset$ ,
- ▶  $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  ist die **Zustandsüberföhrungsfunktion**,
- ▶  $S \subseteq Z$  ist die Menge der **Startzustände** und
- ▶  $E \subseteq Z$  ist die Menge der **Endzustände**.

## Wiederholung: Akzeptanz beim NFA

„Ein Wort  $w$  wird vom NFA akzeptiert, wenn es **mindestens einen** Pfad von **einem** Startzustand zu **einem** Endzustand entlang  $w$  gibt.“

### Definition (Akzeptierte Sprache eines NFA)

Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA.

Wir definieren  $\hat{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  rekursiv durch

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \text{ für alle } X \subseteq Z \\ \hat{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \hat{\delta}(\delta(z, a), w) \text{ für alle } X \subseteq Z\end{aligned}$$

Die von  $M$  **akzeptierte Sprache** ist

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset\}$$

## Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

---

### **Theorem 4.4.1**

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

# Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

---

## Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

Beweis: Zeige, für jede reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L$  lässt sich NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ :

# Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

## Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

Beweis: Zeige, für jede reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L$  lässt sich NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ :

- ▶ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$  ein NFA mit
  - $Z = V \cup \{z_E\}$  ( $z_E$  neu),  $S' = \{S\}$  und  $E = \begin{cases} \{z_E, S\}, & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \{z_E\}, & \text{sonst} \end{cases}$

# Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

## Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

Beweis: Zeige, für jede reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L$  lässt sich NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ :

- ▶ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$  ein NFA mit
  - $Z = V \cup \{z_E\}$  ( $z_E$  neu),  $S' = \{S\}$  und  $E = \begin{cases} \{z_E, S\}, & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \{z_E\}, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \rightarrow a \in P\}$

# Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

## Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

Beweis: Zeige, für jede reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L$  lässt sich NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ :

- ▶ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$  ein NFA mit
  - $Z = V \cup \{z_E\}$  ( $z_E$  neu),  $S' = \{S\}$  und  $E = \begin{cases} \{z_E, S\}, & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \{z_E\}, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \rightarrow a \in P\}$   
und  $\delta(z_E, a) := \emptyset$  für alle  $A \in V, a \in \Sigma$



# Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

## Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

Beweis: Zeige, für jede reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L$  lässt sich NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ :

- ▶ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$  ein NFA mit
  - $Z = V \cup \{z_E\}$  ( $z_E$  neu),  $S' = \{S\}$  und  $E = \begin{cases} \{z_E, S\}, & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \{z_E\}, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \rightarrow a \in P\}$   
und  $\delta(z_E, a) := \emptyset$  für alle  $A \in V, a \in \Sigma$
- ▶ Offensichtlich gilt  $\varepsilon \in L(G) \iff \varepsilon \in L(M)$ .

# Jede reguläre Sprache wird durch einen NFA erkannt

## Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

Beweis: Zeige, für jede reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L$  lässt sich NFA  $M$  konstruieren mit  $L(M) = L(G)$ :

- ▶ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$  ein NFA mit
  - $Z = V \cup \{z_E\}$  ( $z_E$  neu),  $S' = \{S\}$  und  $E = \begin{cases} \{z_E, S\}, & \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P \\ \{z_E\}, & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\delta(A, a) := \{B \mid A \rightarrow aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \rightarrow a \in P\}$   
und  $\delta(z_E, a) := \emptyset$  für alle  $A \in V, a \in \Sigma$
- ▶ Offensichtlich gilt  $\varepsilon \in L(G) \iff \varepsilon \in L(M)$ . Für  $w = a_1 \cdots a_n$  gilt:
  - $w \in L(G)$  g.d.w.  $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$   
g.d.w. es gibt Zustände  $A_1, \dots, A_{n-1}$  mit  $A_1 \in \delta(S, a_1)$ ,  $A_{i+1} \in \delta(A_i, a_{i+1})$   
für  $1 \leq i \leq n-2$  und  $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$
  - g.d.w. es gibt einen Lauf  $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$
  - g.d.w.  $w \in L(M)$



## Beispiel: Konstruktion NFA aus Typ 3-Grammatik

---

Betrachte die reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, A)$   
mit  $V = \{A, B, C, D\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und

$$\begin{aligned} P = \{ & A \rightarrow \varepsilon \mid aB \mid bB \mid cB \mid aC, \\ & B \rightarrow aB \mid bB \mid cB \mid aC, \\ & C \rightarrow aD \mid bD \mid cD, \\ & D \rightarrow a \mid b \mid c \} \end{aligned}$$

## Beispiel: Konstruktion NFA aus Typ 3-Grammatik

Betrachte die reguläre Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, A)$   
mit  $V = \{A, B, C, D\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und

$$\begin{aligned}P = \{ & A \rightarrow \varepsilon \mid aB \mid bB \mid cB \mid aC, \\ & B \rightarrow aB \mid bB \mid cB \mid aC, \\ & C \rightarrow aD \mid bD \mid cD, \\ & D \rightarrow a \mid b \mid c\end{aligned}$$

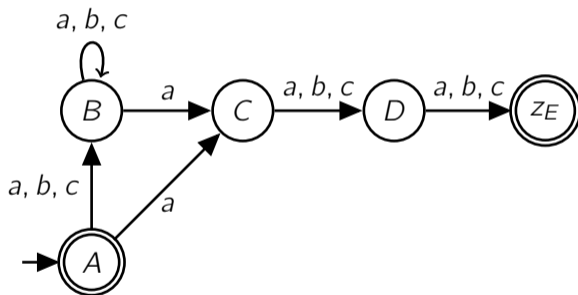
Konstruktion des dazu passenden NFA:  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  mit

- ▶  $Z = V \cup \{z_E\} = \{A, B, C, D, z_E\}$ ,
- ▶  $E = \{z_E, A\}$ ,  $S = \{A\}$  und

$$\begin{array}{llllll} \delta(A, a) = \{B, C\} & \delta(B, a) = \{B, C\} & \delta(C, a) = \{D\} & \delta(D, a) = \{z_E\} & \delta(z_E, a) = \emptyset \\ \delta(A, b) = \{B\} & \delta(B, b) = \{B\} & \delta(C, b) = \{D\} & \delta(D, b) = \{z_E\} & \delta(z_E, b) = \emptyset \\ \delta(A, c) = \{B\} & \delta(B, c) = \{B\} & \delta(C, c) = \{D\} & \delta(D, c) = \{z_E\} & \delta(z_E, c) = \emptyset \end{array}$$

## Beispiel: Konstruktion NFA aus Typ 3-Grammatik (2)

Der Zustandsgraph zu  $M$  ist



# NFAs in DFAs transformieren

---

## **Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)**

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

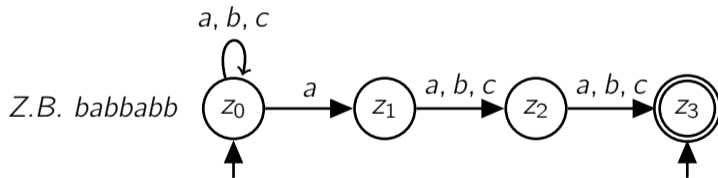
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



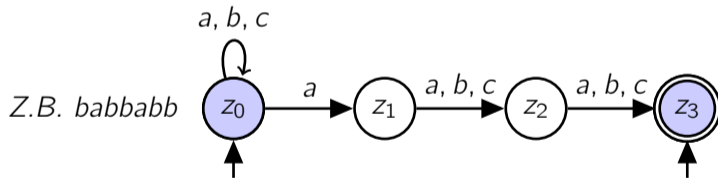
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- ▶ Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“





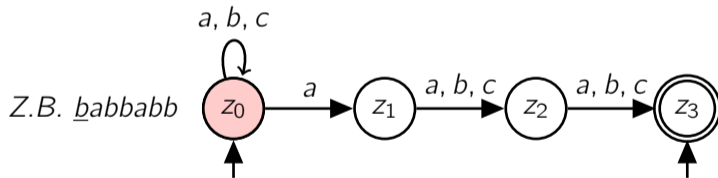
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



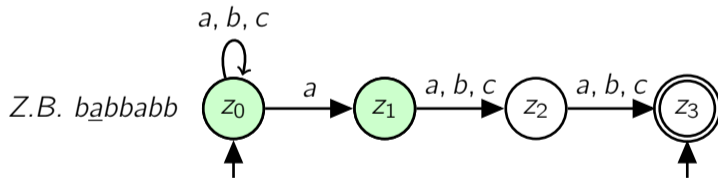
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- ▶ Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



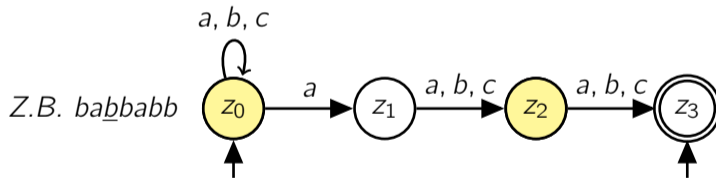
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „der DFA **alle** Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“



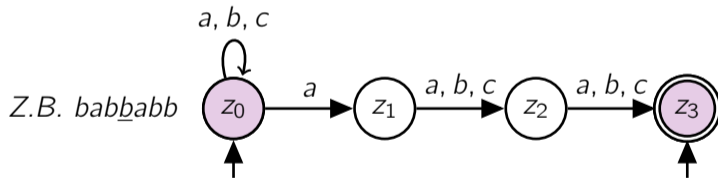
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „der DFA **alle** Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“



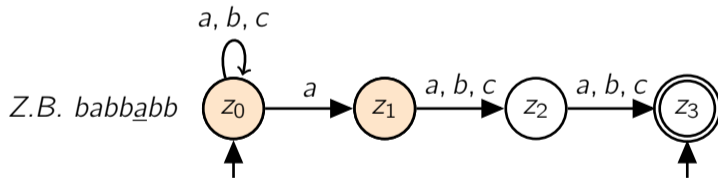
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- ▶ Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



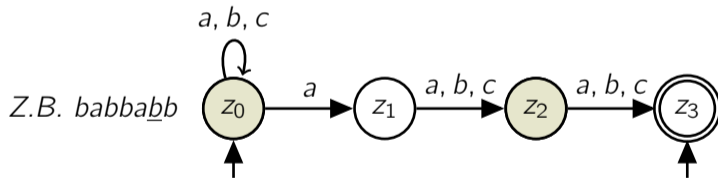
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



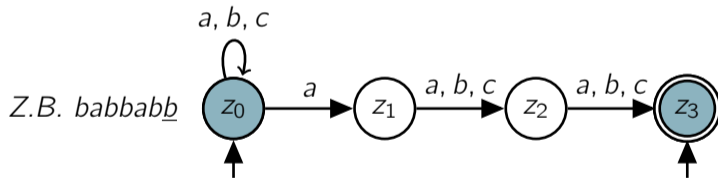
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



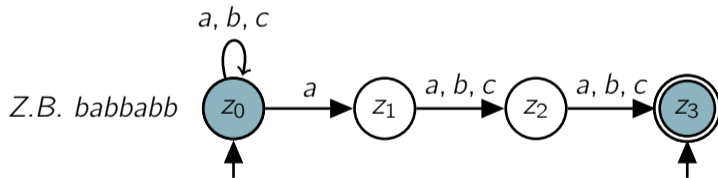
# NFAs in DFAs transformieren

## Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich „*der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte*“



- *Konstruktion: Jede Teilmenge von Zuständen des NFA wird zu einem Zustand des DFA (daher: Potenzmengenkonstruktion)*



# Potenzmengenkonstruktion

Für NFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  konstruieren wir den DFA  $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$  mit

▶  $Z' = \mathcal{P}(Z)$

*„Zustandsmenge ist Potenzmenge von  $Z$ “*

▶  $S' = S$

*„Startzustand ist Menge  $S$  aller Startzustände von  $M$ “*

▶  $E' = \{X \in Z' \mid (E \cap X) \neq \emptyset\}$

*„Jede Menge, die mindestens einen Endzustand von  $E$  enthält, ist Endzustand in  $M'$ “*

▶  $\delta'(X, a) = \bigcup_{z \in X} \delta(z, a) (= \widehat{\delta}(X, a))$

*„ $\delta'(X, a)$  berechnet alle von einem Zustand in  $X$  aus über  $a$  erreichbaren Zustände.“*

# Korrektheit der Potenzmengenkonstruktion

---

Wir beweisen, dass  $L(M') = L(M)$  gilt, indem wir zeigen:

$$w \in L(M) \text{ g.d.w. } w \in L(M')$$

# Korrektheit der Potenzmengenkonstruktion

---

Wir beweisen, dass  $L(M') = L(M)$  gilt, indem wir zeigen:

$$w \in L(M) \text{ g.d.w. } w \in L(M')$$

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\varepsilon \in L(M)$  g.d.w.  $S \cap E \neq \emptyset$  g.d.w.  $S \in E'$  g.d.w.  $\varepsilon \in L(M')$

# Korrektheit der Potenzmengenkonstruktion

Wir beweisen, dass  $L(M') = L(M)$  gilt, indem wir zeigen:

$$w \in L(M) \text{ g.d.w. } w \in L(M')$$

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\varepsilon \in L(M)$  g.d.w.  $S \cap E \neq \emptyset$  g.d.w.  $S \in E'$  g.d.w.  $\varepsilon \in L(M')$
- ▶ Fall  $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ :

$$w \in L(M)$$

$$\text{g.d.w. } \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset$$

g.d.w. es gibt Teilmengen  $Z_1, \dots, Z_n$  von  $Z$  mit

$$\left(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)\right) = Z_1, \left(\bigcup_{z \in Z_i} \delta(z, a_{i+1})\right) = Z_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, n-1$$

und  $Z_n \cap E \neq \emptyset$

g.d.w. es gibt Teilmengen  $Z_1, \dots, Z_n$  von  $Z$  mit

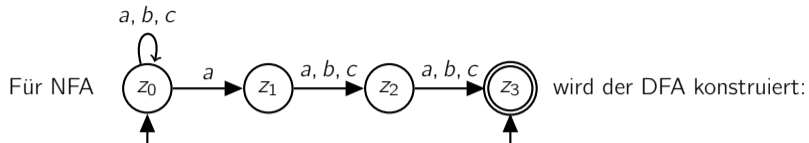
$$\delta'(S, a_1) = Z_1, \delta'(Z_i, a_{i+1}) = Z_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, n-1$$

$$\text{und } Z_n \cap E \neq \emptyset \quad (\text{zur Erinnerung: } \delta'(X, a) = \bigcup_{z \in X} \delta(z, a))$$

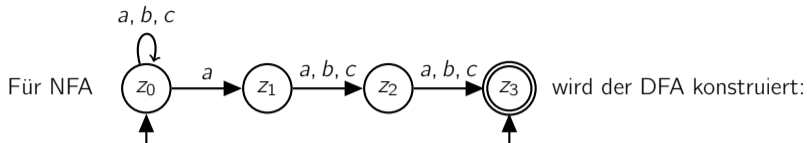
$$\text{g.d.w. } \widehat{\delta}'(S', w) \in E'$$

$$\text{g.d.w. } w \in L(M')$$

# Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (1)



# Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (1)



$$M' = (\mathcal{P}(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}), \{a, b, c\}, \delta', S', E')$$
 mit  $S' = \{z_0, z_3\}$

$$E' = \{\{z_3\}, \{z_0, z_3\}, \{z_1, z_3\}, \{z_2, z_3\}, \{z_0, z_1, z_3\}, \{z_0, z_2, z_3\}, \{z_1, z_2, z_3\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\}\}$$

$$\delta'(\emptyset, d) = \emptyset \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_1, z_3\}, d) = \{z_2\} \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0\}, a) = \{z_0, z_1\}$$

$$\delta'(\{z_2, z_3\}, d) = \{z_3\} \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0\}, d) = \{z_0\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_2\}, a) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\delta'(\{z_1\}, d) = \{z_2\} \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_2\}, d) = \{z_0, z_2, z_3\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_2\}, d) = \{z_3\} \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_3\}, a) = \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$\delta'(\{z_3\}, d) = \emptyset \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_3\}, d) = \{z_0, z_2\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1\}, a) = \{z_0, z_1, z_2\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_2, z_3\}, a) = \{z_0, z_1, z_3\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1\}, d) = \{z_0, z_2\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_2, z_3\}, d) = \{z_0, z_3\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_2\}, a) = \{z_0, z_1, z_3\}$$

$$\delta'(\{z_1, z_2, z_3\}, d) = \{z_2, z_3\} \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_2\}, d) = \{z_0, z_3\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, a) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_3\}, a) = \{z_0, z_1\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, b) = \{z_0, z_2, z_3\}$$

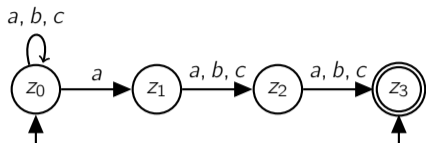
$$\delta'(\{z_0, z_3\}, d) = \{z_0\} \text{ für } d \in \{b, c\}$$

$$\delta'(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, c) = \{z_0, z_2, z_3\}$$

$$\delta'(\{z_1, z_2\}, d) = \{z_2, z_3\} \text{ für } d \in \{a, b, c\}$$

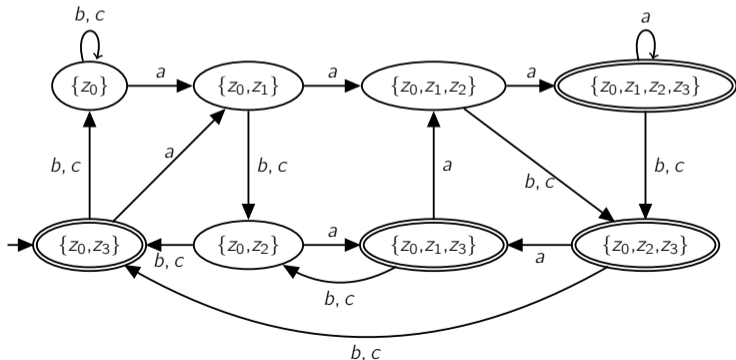


## Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)



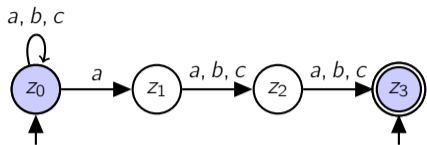
Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):



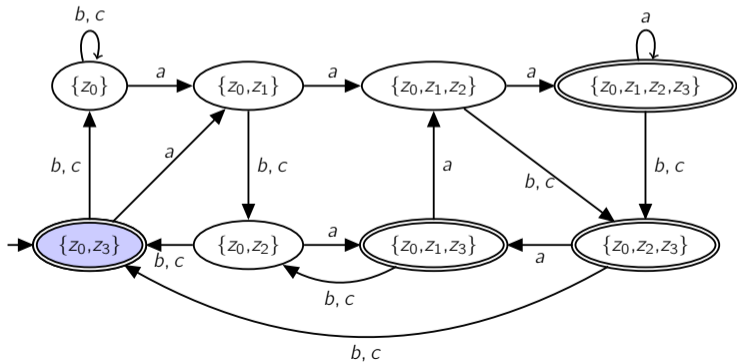


# Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)



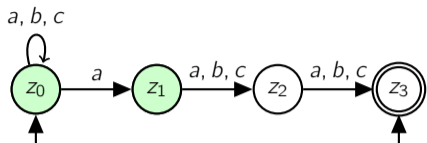
Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):



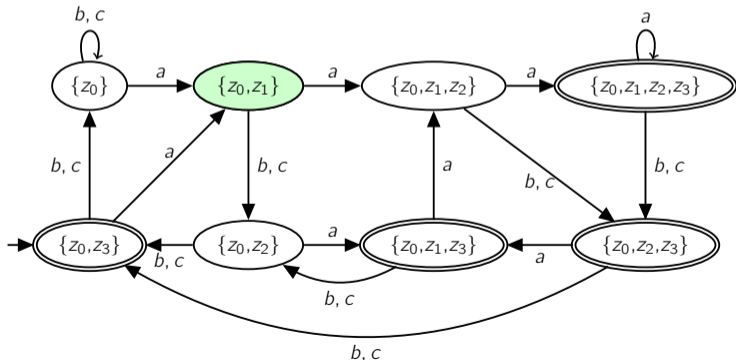


## Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

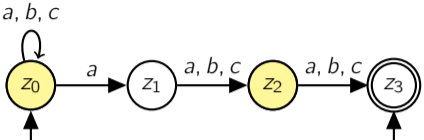


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

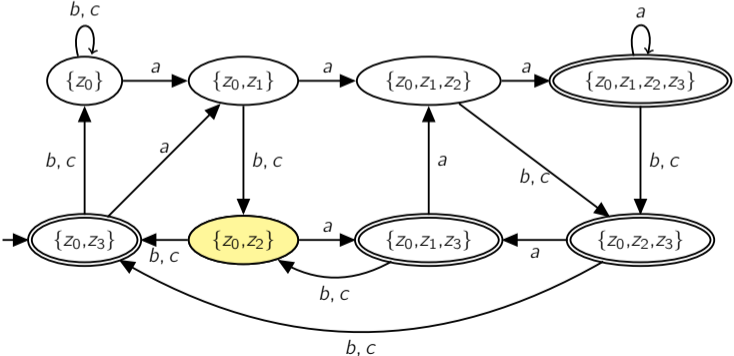


# Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

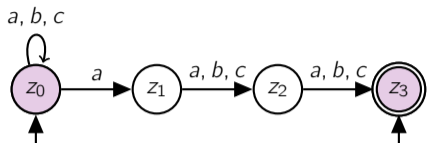


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

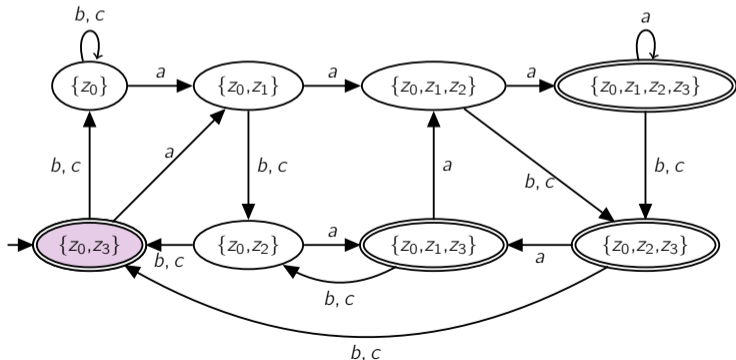


## Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

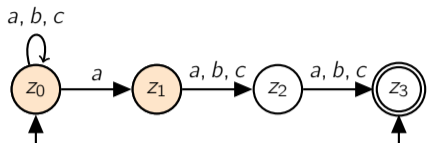


Ablauf bei Eingabe babb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

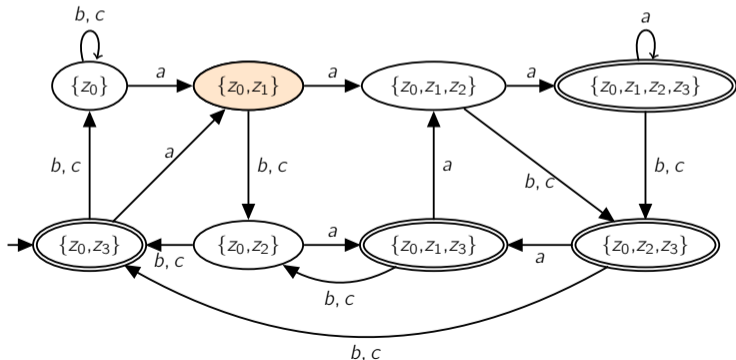


# Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

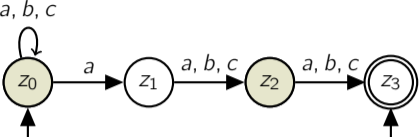


Ablauf bei Eingabe babb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

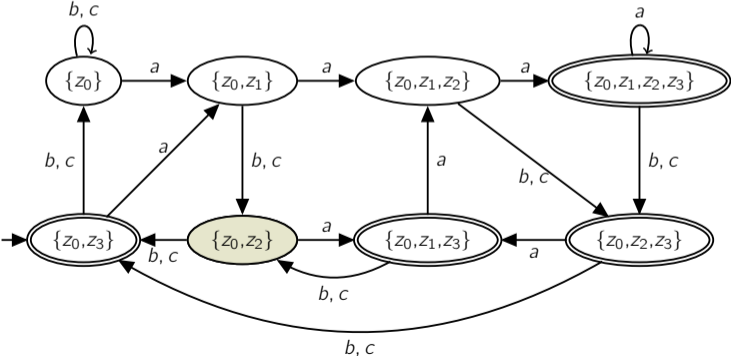


# Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)



Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):







# DFAs & NFAs sind Formalismen für Typ 3-Sprachen

---

## Theorem 4.5.4

DFAs bzw. NFAs erkennen **genau** die regulären Sprachen.

Beweis:

# DFAs & NFAs sind Formalismen für Typ 3-Sprachen

## Theorem 4.5.4

DFAs bzw. NFAs erkennen **genau** die regulären Sprachen.

Beweis:

- ▶ Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA der sie erkennt.

Das folgt aus:

- ▶ Theorem 4.4.1: Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .
- ▶ Theorem 4.5.1: Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

# DFAs & NFAs sind Formalismen für Typ 3-Sprachen

## Theorem 4.5.4

DFAs bzw. NFAs erkennen **genau** die regulären Sprachen.

Beweis:

- ▶ Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA der sie erkennt.

Das folgt aus:

- ▶ Theorem 4.4.1: Für jede reguläre Sprache  $L$  gibt es einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L$ .
- ▶ Theorem 4.5.1: Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

- ▶ Die akzeptierte Sprache eines DFAs bzw. NFAs ist regulär.

Das folgt aus:

- ▶ Theorem 4.2.1: Sei  $M$  ein DFA. Dann ist  $L(M)$  regulär.
- ▶ Theorem 4.5.1: Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.



## Größe des DFAs vs NFAs

---

- ▶ Sei  $M$  ein NFA mit  $n$  Zuständen.
- ▶ Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat  $2^n$  Zustände. D.h. der Platz explodiert uns.
- ▶ Frage: Geht es besser (unsere Kodierung ist zu einfach) oder nicht?

# Größe des DFAs vs NFAs

- ▶ Sei  $M$  ein NFA mit  $n$  Zuständen.
- ▶ Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat  $2^n$  Zustände. D.h. der Platz explodiert uns.
- ▶ Frage: Geht es besser (unsere Kodierung ist zu einfach) oder nicht?
- ▶ Das folgende Lemma zeigt, dass es nicht wirklich besser geht.

## Lemma

Sei  $L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$  für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$   
(Sprache aller Wörter aus  $\{a, b\}^*$ , die an  $n$ -letzter Stelle ein  $a$  haben).

- ▶ Es gibt NFA  $M_n$  mit  $L(M_n) = L_n$  und  $M_n$  hat  $n + 1$  Zustände.
- ▶ Jeder DFA  $M'_n$  mit  $L(M'_n) = L_n$  hat mindestens  $2^n$  Zustände.

Beweis: Nächste Stunde (nur FSK)