DFAs akzeptieren reguläre Sprachen, Nichtdeterministische endliche Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 2. Mai 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Wiederholung: Deterministische endliche Automaten

Definition (Deterministischer endlicher Automat, DFA)

Ein deterministischer endlicher Automat (determinististic finite automaton, DFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$,
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ ist die Zustandsüberführungsfunktion (oder nur Überführungsfunktion),
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand und
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände (oder auch akzeptierende Zustände).

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\}$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

Leeres Wort: Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
Wörter w mit $|w| = m \geq 1$:

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

Leeres Wort: Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
Wörter w mit $|w| = m \geq 1$:

$$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

Leeres Wort: Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
Wörter w mit $|w| = m \geq 1$:

$$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

Leeres Wort: Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
Wörter w mit $|w| = m \geq 1$:

$$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$

g.d.w. $z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1$, für $1 \leq i < m$: $a_1 \cdots a_{i-1} z_{i-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i z_i$ und

$a_1 \cdots a_{m-1} z_{m-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_m$, d.h. $z_0 \Rightarrow_G^* a_1 \cdots a_m$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

Leeres Wort: Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
Wörter w mit $|w| = m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
& w = a_1 \cdots a_m \in L(M) \\
\text{g.d.w. } & \text{es gibt } z_1, \ldots, z_m \in Z \text{ mit } \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i \text{ und } z_m \in E \\
\text{g.d.w. } & z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1, \text{ für } 1 \leq i < m\text{: } a_1 \cdots a_{i-1} z_{i-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i z_i \text{ und} \\
& a_1 \cdots a_{m-1} z_{m-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_m, \text{ d.h. } z_0 \Rightarrow_G^* a_1 \cdots a_m \\
\text{g.d.w. } & w = a_1 \cdots a_m \in L(G)
\end{aligned}$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Konstruiere für DFA M eine reguläre Grammatik G, sodass $L(G) = L(M)$:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik (mit Sonderregel) mit $V = Z$, $S = z_0$ und

$$P = \{z_i \to az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E\} \cup \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\}$$

Leeres Wort: Offensichtlich gilt $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
Wörter w mit $|w| = m \geq 1$:

$$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$

g.d.w. $z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1$, für $1 \leq i < m$: $a_1 \cdots a_{i-1} z_{i-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i z_i$ und $a_1 \cdots a_{m-1} z_{m-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_m$, d.h. $z_0 \Rightarrow_G^* a_1 \cdots a_m$

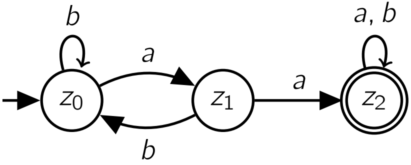
g.d.w. $w = a_1 \cdots a_m \in L(G)$

Daher gilt $L(M) = L(G)$ und somit ist $L(M)$ regulär. $\square$

Beispiel: Konstruktion Typ 3-Grammatik aus DFA

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

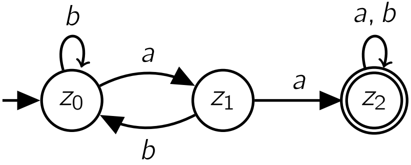
$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \quad \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \quad \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \quad \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Beispiel: Konstruktion Typ 3-Grammatik aus DFA

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \qquad \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \qquad \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \qquad \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Die erzeugte reguläre Grammatik dazu ist:

$$\begin{aligned} G &= (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, P, z_0) \text{ mit} \\ P &= \{z_0 \to az_1 \mid bz_0, \\ &\qquad z_1 \to az_2 \mid a \mid bz_0, \\ &\qquad z_2 \to az_2 \mid a \mid bz_2 \mid b\} \end{aligned}$$

Wird jede reguläre Sprache durch einen DFA akzeptiert?

- Der vorherige Beweis konstruiert:
  „für jeden DFA gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik"
- Für die andere Richtung wäre notwendig:
  „für jede reguläre Grammatik gibt es einen äquivalenten DFA"

Wird jede reguläre Sprache durch einen DFA akzeptiert?

- Der vorherige Beweis konstruiert:
  „für jeden DFA gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik"
- Für die andere Richtung wäre notwendig:
  „für jede reguläre Grammatik gibt es einen äquivalenten DFA"

Problem:

- Produktionen: $A \to aA_1$ und $A \to aA_2$ können in Grammatiken vorkommen
- Konstruktion des determinstischen Automaten zunächst unklar

Wird jede reguläre Sprache durch einen DFA akzeptiert?

- Der vorherige Beweis konstruiert:
  „für jeden DFA gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik"
- Für die andere Richtung wäre notwendig:
  „für jede reguläre Grammatik gibt es einen äquivalenten DFA"

Problem:

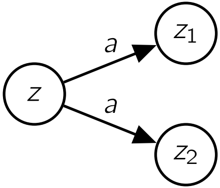
- Produktionen: $A \to aA_1$ und $A \to aA_2$ können in Grammatiken vorkommen
- Konstruktion des determinstischen Automaten zunächst unklar

Daher: Beweis, dass DFAs alle regulären Sprachen akzeptieren, erfolgt auf Umwegen und verwendet nichtdeterministische endliche Automaten

Nichtdeterministische endliche Automaten

Idee:

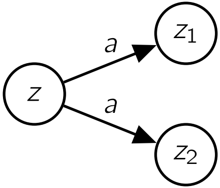
- Zustandswechsel nicht eindeutig, sondern nichtdeterministisch in einen von mehreren möglichen Zuständen
- D.h. der Automat darf sozusagen „raten“, welchen Nachfolgezustand er wählt
- Im Zustandsgraph erlaubt:



Nichtdeterministische endliche Automaten

Idee:

- Zustandswechsel nicht eindeutig, sondern nichtdeterministisch in einen von mehreren möglichen Zuständen
- D.h. der Automat darf sozusagen „raten“, welchen Nachfolgezustand er wählt
- Im Zustandsgraph erlaubt:



- Technisch:
  - DFA $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ und ein Startzustand
  - NFA $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ und Menge von Startzuständen

Definition NFA

Definition (NFA)

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (nondeterministic finite automaton, NFA) ist ein 5-Tupel $(Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$,
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände und
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Akzeptanz beim NFA

„Ein Wort w wird vom NFA akzeptiert, wenn es **mindestens einen** *Pfad von* **einem** *Startzustand zu* **einem** *Endzustand entlang w gibt.“*

Akzeptanz beim NFA

„Ein Wort w wird vom NFA akzeptiert, wenn es **mindestens einen** *Pfad von* **einem** *Startzustand zu* **einem** *Endzustand entlang w gibt.“*

Definition (Akzeptierte Sprache eines NFA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.
Wir definieren $\widehat{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \text{ für alle } X \subseteq Z \\
\widehat{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widehat{\delta}(\delta(z, a), w) \text{ für alle } X \subseteq Z
\end{aligned}$$

Akzeptanz beim NFA

„Ein Wort w wird vom NFA akzeptiert, wenn es **mindestens einen** *Pfad von* **einem** *Startzustand zu* **einem** *Endzustand entlang w gibt."*

Definition (Akzeptierte Sprache eines NFA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.
Wir definieren $\widehat{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \text{ für alle } X \subseteq Z \\ \widehat{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widehat{\delta}(\delta(z, a), w) \text{ für alle } X \subseteq Z \end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset\}$$

Beispiel: Leere Menge von Startzuständen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \emptyset, E)$ ein NFA.
Dann ist $L(M) = ?$.

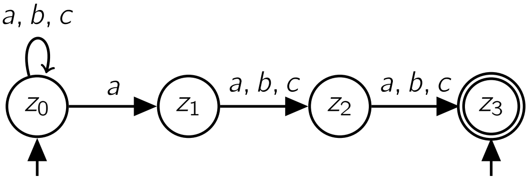
Beispiel: Leere Menge von Startzuständen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \emptyset, E)$ ein NFA.
Dann ist $L(M) = \emptyset$.

Beispiel

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b, c\}, \delta, \{z_0, z_3\}, \{z_3\})$ ein NFA mit

$$\begin{array}{llll}
\delta(z_0, a) = \{z_0, z_1\} & \delta(z_1, a) = \{z_2\} & \delta(z_2, a) = \{z_3\} & \delta(z_3, a) = \emptyset \\
\delta(z_0, b) = \{z_0\} & \delta(z_1, b) = \{z_2\} & \delta(z_2, b) = \{z_3\} & \delta(z_3, b) = \emptyset \\
\delta(z_0, c) = \{z_0\} & \delta(z_1, c) = \{z_2\} & \delta(z_2, c) = \{z_3\} & \delta(z_3, c) = \emptyset
\end{array}$$

Der Zustandsgraph zu M ist  .

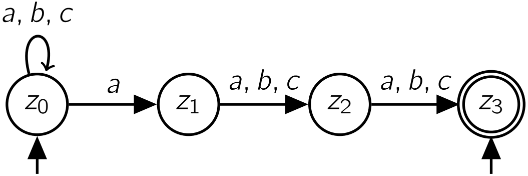
$$L(M) = ?$$

Beispiel

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b, c\}, \delta, \{z_0, z_3\}, \{z_3\})$ ein NFA mit

$$
\begin{array}{llll}
\delta(z_0, a) = \{z_0, z_1\} & \delta(z_1, a) = \{z_2\} & \delta(z_2, a) = \{z_3\} & \delta(z_3, a) = \emptyset \\
\delta(z_0, b) = \{z_0\} & \delta(z_1, b) = \{z_2\} & \delta(z_2, b) = \{z_3\} & \delta(z_3, b) = \emptyset \\
\delta(z_0, c) = \{z_0\} & \delta(z_1, c) = \{z_2\} & \delta(z_2, c) = \{z_3\} & \delta(z_3, c) = \emptyset
\end{array}
$$

Der Zustandsgraph zu M ist



.

$$L(M) = \{\varepsilon\} \cup \{uaw \mid u \in \{a, b, c\}^*, w \in \{a, b, c\}^2\}$$

Lauf beim NFA

Definition (Lauf)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA und $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$.
Eine Folge von Zuständen $q_0, \ldots, q_n$ mit $q_0 \in S$ und $q_i \in \delta(q_{i-1}, w[i])$ bezeichnet man als **Lauf** von M für Wort w.

Ein Lauf der mit einem Endzustand endet, nennen wir auch **akzeptierenden Lauf**.

Beachte: Während es bei DFAs genau einen Lauf pro Wort gibt, kann es bei NFAs mehrere geben.