

# Erzeugte Sprachen, Mehrdeutigkeit, Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik

Stand: 19. April 2023

Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel



# Wiederholung: Die Chomsky-Hierarchie

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Grammatik.

## **$G$ ist vom Typ 0**

$G$  ist automatisch vom Typ 0

## **$G$ ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...**

für alle  $(\ell \rightarrow r) \in P$ :  $|\ell| \leq |r|$

## **$G$ ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...**

$G$  ist vom Typ 1 und für alle  $(\ell \rightarrow r) \in P$  gilt:  $\ell \in V$

## **$G$ ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...**

$G$  ist vom Typ 2 und für alle  $(A \rightarrow r) \in P$  gilt:  $r = a$  oder  $r = aA'$  für  $a \in \Sigma, A' \in V$   
(die rechten Seiten sind Wörter aus  $\Sigma \cup \Sigma V$ )

## Beispiel (kontextsensitive Grammatik)

---

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

## Beispiel (kontextsensitive Grammatik)

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Beispiel-Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$   
 $\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC$   
 $\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC$   
 $\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC$   
 $\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbCccc \Rightarrow aaaabbbbccCC$   
 $\Rightarrow aaaabbbbcccC \Rightarrow aaaabbbbccccc$

## Beispiel (kontextsensitive Grammatik)

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Beispiel-Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$   
 $\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC$   
 $\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC$   
 $\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC$   
 $\Rightarrow aaaabbbbBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC$   
 $\Rightarrow aaaabbbbBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\supseteq$ “: Zeige  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\supseteq$ “: Zeige  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- ▶ Wende  $n - 1$  mal  $S \rightarrow aSBC$  und dann einmal  $S \rightarrow aBC$  an:

$$S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$$



## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\supseteq$ “: Zeige  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- ▶ Wende  $n - 1$  mal  $S \rightarrow aSBC$  und dann einmal  $S \rightarrow aBC$  an:  
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$
- ▶ Wende  $CB \rightarrow BC$  solange an, bis es kein Teilwort  $CB$  mehr gibt:  
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\supseteq$ “: Zeige  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- ▶ Wende  $n - 1$  mal  $S \rightarrow aSBC$  und dann einmal  $S \rightarrow aBC$  an:  
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$
- ▶ Wende  $CB \rightarrow BC$  solange an, bis es kein Teilwort  $CB$  mehr gibt:  
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$
- ▶ Wende  $aB \rightarrow ab$  und anschließend  $n - 1$  mal  $bB \rightarrow bb$  an:  
 $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\supseteq$ “: Zeige  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- ▶ Wende  $n - 1$  mal  $S \rightarrow aSBC$  und dann einmal  $S \rightarrow aBC$  an:  
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$
- ▶ Wende  $CB \rightarrow BC$  solange an, bis es kein Teilwort  $CB$  mehr gibt:  
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$
- ▶ Wende  $aB \rightarrow ab$  und anschließend  $n - 1$  mal  $bB \rightarrow bb$  an:  
 $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$
- ▶ Wende einmal  $bC \rightarrow bc$  und anschließend  $n - 1$  mal  $cC \rightarrow cc$  an:  
 $a^n b^n C^n \Rightarrow a^n b^n c C^{n-1} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\supseteq$ “: Zeige  $a^n b^n c^n \in L(G)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- ▶ Wende  $n - 1$  mal  $S \rightarrow aSBC$  und dann einmal  $S \rightarrow aBC$  an:  
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$
- ▶ Wende  $CB \rightarrow BC$  solange an, bis es kein Teilwort  $CB$  mehr gibt:  
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$
- ▶ Wende  $aB \rightarrow ab$  und anschließend  $n - 1$  mal  $bB \rightarrow bb$  an:  
 $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$
- ▶ Wende einmal  $bC \rightarrow bc$  und anschließend  $n - 1$  mal  $cC \rightarrow cc$  an:  
 $a^n b^n C^n \Rightarrow a^n b^n c C^{n-1} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$

Zusammensetzen aller Ableitungsschritte zeigt  $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$ .

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (2)

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\subseteq$ “: Zeige, dass alle von  $G$  erzeugten Wörter von der Form  $a^n b^n c^n$  sind.

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (2)

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\subseteq$ “: Zeige, dass alle von  $G$  erzeugten Wörter von der Form  $a^n b^n c^n$  sind.

- Für  $S \Rightarrow_G^* u$  mit  $u$  Satzform zeigen die Regeln:  
 $\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$ .

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (2)

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\subseteq$ “: Zeige, dass alle von  $G$  erzeugten Wörter von der Form  $a^n b^n c^n$  sind.

- ▶ Für  $S \Rightarrow_G^* u$  mit  $u$  Satzform zeigen die Regeln:  
 $\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$ .
- ▶ Für  $S \Rightarrow_G^* w$  mit  $w \in \{a, b, c\}^*$  gilt:  $a$ 's werden ganz links erzeugt, d.h.  
 $w = a^n w'$  mit  $w' \in \{b, c\}^*$  und  $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ .

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (2)

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\subseteq$ “: Zeige, dass alle von  $G$  erzeugten Wörter von der Form  $a^n b^n c^n$  sind.

- ▶ Für  $S \Rightarrow_G^* u$  mit  $u$  Satzform zeigen die Regeln:  
 $\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$ .
- ▶ Für  $S \Rightarrow_G^* w$  mit  $w \in \{a, b, c\}^*$  gilt:  $a$ 's werden ganz links erzeugt, d.h.  
 $w = a^n w'$  mit  $w' \in \{b, c\}^*$  und  $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ .
- ▶ Es gilt  $w' = bw_1$ , da jedes auf  $a$  folgende Symbol durch  $aB \rightarrow ab$  erzeugt wird und die Regeln keine Terminalsymbole vertauschen.



## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (3)

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\subseteq$ “: Zeige, dass alle von  $G$  erzeugten Wörter von der Form  $a^n b^n c^n$  sind.

▶ ...

▶ Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes  $w' \in \{b, c\}^*$  nur durch  $bB \rightarrow bb$ ,  $bC \rightarrow bc$  und  $cC \rightarrow cc$  erzeugt worden sein.

Diese Produktionen erlauben nur **einen Wechsel von  $b$  zu  $c$**  und **keine Wechsel von  $c$  zu  $b$** . Auch ein **Umordnen der Terminalsymbole** ist **nicht möglich** (da es keine Produktion dafür gibt).

## Grammatik erzeugt $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ (3)

### Satz

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  für  $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$  mit  
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

„ $\subseteq$ “: Zeige, dass alle von  $G$  erzeugten Wörter von der Form  $a^n b^n c^n$  sind.

▶ ...

▶ Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes  $w' \in \{b, c\}^*$  nur durch  $bB \rightarrow bb$ ,  $bC \rightarrow bc$  und  $cC \rightarrow cc$  erzeugt worden sein.

Diese Produktionen erlauben nur **einen Wechsel von  $b$  zu  $c$**  und **keine Wechsel von  $c$  zu  $b$** . Auch ein **Umordnen der Terminalsymbole** ist **nicht möglich** (da es keine Produktion dafür gibt).

▶ Daher gilt  $w' = b^i c^j$  und mit  $n = \#_b(w') = \#_c(w')$  sogar  $w' = b^n c^n$ . □

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

---

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

# Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

---

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, \color{red}T \rightarrow a\color{green}AT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$a\color{red}AT\$ \Rightarrow \$aAa\color{green}AT\$$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$$$



## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAaAbB\$$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \end{aligned}$$



## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab \end{aligned}$$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Eine Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab \end{aligned}$$

Beachte:  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

---

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

- ▶ Mit  $S \rightarrow \$T\$$  wird zunächst eine Umrahmung mit  $\$\$$  erzeugt.

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

- ▶ Mit  $S \rightarrow \$T\$$  wird zunächst eine Umrahmung mit  $\$\$$  erzeugt.
- ▶ Mit  $T \rightarrow aAT$ ,  $T \rightarrow bBT$ ,  $T \rightarrow \epsilon$  wird ein Wort aus 2er Blöcken  $aA$  und  $bB$  erzeugt.

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

- ▶ Mit  $S \rightarrow \$T\$$  wird zunächst eine Umrahmung mit  $\$\$$  erzeugt.
- ▶ Mit  $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$  wird ein Wort aus 2er Blöcken  $aA$  und  $bB$  erzeugt.
- ▶ Mit  $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$  kommen  $A$ 's und  $B$ 's bis vor  $\$$ .

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

- ▶ Mit  $S \rightarrow \$T\$$  wird zunächst eine Umrahmung mit  $\$\$$  erzeugt.
- ▶ Mit  $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$  wird ein Wort aus 2er Blöcken  $aA$  und  $bB$  erzeugt.
- ▶ Mit  $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$  kommen  $A$ 's und  $B$ 's bis vor  $\$$ .
- ▶ Mit  $A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b$  werden die  $A$ 's und  $B$ 's in  $a$ 's und  $b$ 's verwandelt, indem sie über das rechte  $\$$  hüpfen.



## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

- ▶ Mit  $S \rightarrow \$T\$$  wird zunächst eine Umrahmung mit  $\$\$$  erzeugt.
- ▶ Mit  $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$  wird ein Wort aus 2er Blöcken  $aA$  und  $bB$  erzeugt.
- ▶ Mit  $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$  kommen  $A$ 's und  $B$ 's bis vor  $\$$ .
- ▶ Mit  $A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b$  werden die  $A$ 's und  $B$ 's in  $a$ 's und  $b$ 's verwandelt, indem sie über das rechte  $\$$  hüpfen.
- ▶ Mit  $\$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\%$  wird das linke  $\$$  zum rechten geschoben, mit  $\$\$ \rightarrow \epsilon$  werden die beiden  $\$$ 's dann eliminiert.

## Beispiel einer Typ 0-Grammatik (2)

Grammatik  $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \varepsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \varepsilon\}$$

Begründung dafür, dass  $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$  gilt:

- ▶ Mit  $S \rightarrow \$T\$$  wird zunächst eine Umrahmung mit  $\$\$$  erzeugt.
- ▶ Mit  $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \varepsilon$  wird ein Wort aus 2er Blöcken  $aA$  und  $bB$  erzeugt.
- ▶ Mit  $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$  kommen  $A$ 's und  $B$ 's bis vor  $\$$ .
- ▶ Mit  $A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b$  werden die  $A$ 's und  $B$ 's in  $a$ 's und  $b$ 's verwandelt, indem sie über das rechte  $\$$  hüpfen.
- ▶ Mit  $\$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\%$  wird das linke  $\$$  zum rechten geschoben, mit  $\$\$ \rightarrow \varepsilon$  werden die beiden  $\$$ 's dann eliminiert.
- ▶ Bei allen Schritten wird die relative Lage aller  $a$  zu  $b$  sowie aller  $A$  zu  $B$  nicht geändert.

# Mehrdeutige Grammatiken

Beispiel:

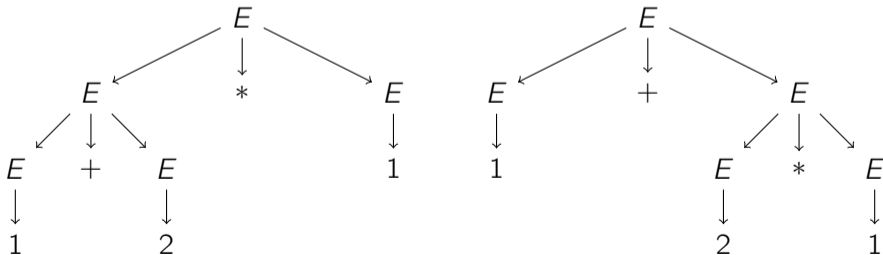
$$(E, \{*, +, 1, 2\}, \{E \rightarrow E * E, E \rightarrow E + E, E \rightarrow 1, E \rightarrow 2\}, E)$$

Zwei Ableitungen für  $1 + 2 * 1$ :

$$\blacktriangleright E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 1$$

$$\blacktriangleright E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 1.$$

Syntaxbäume dazu:



## Mehrdeutige Grammatiken (2)

### Mehrdeutige Grammatik

Eine Typ 2-Grammatik ist mehrdeutig, wenn es verschieden strukturierte Syntaxbäume für dasselbe Wort  $w$  gibt.

### Inhärent mehrdeutige Sprache

Eine Typ 2-Sprache ist inhärent mehrdeutig, wenn es nur mehrdeutige Grammatiken gibt, die diese Sprache erzeugen.

Die Sprache

$$\{a^m b^m c^n d^n \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{a^m b^n c^n d^m \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

ist inhärent mehrdeutig (Beweis z.B. in Hopcroft, Motwani, Ullman, 2006)

## $\varepsilon$ -Regel für Typ 1, 2, 3-Grammatiken

- ▶ Das leere Wort  $\varepsilon$  kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden:  
Produktion  $S \rightarrow \varepsilon$  erfüllt die Typ 1-Bedingung  $|S| \leq |\varepsilon|$  nicht. Daher Sonderregel:

### $\varepsilon$ -Regel für Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion  $(S \rightarrow \varepsilon) \in P$  enthalten, vorausgesetzt, dass keine rechte Seite einer Produktion in  $P$ , die Variable  $S$  enthält.

#### **Sonderregel erlaubt nicht:**

$$G = (\{S\}, \{a\}, \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSa\}, S)$$

#### **Sonderregel erlaubt:**

$$G = (\{S', S\}, \{a\}, \{S' \rightarrow \varepsilon, S' \rightarrow aSa, S \rightarrow aSa\}, S')$$

## Leeres Wort hinzufügen geht mit Sonderregel immer

### Satz

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  vom Typ  $i \in \{1, 2, 3\}$  mit  $\varepsilon \notin L(G)$ . Sei  $S' \notin V$ .

Dann erzeugt  $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S' \rightarrow r \mid S \rightarrow r \in P\}, S')$  die Sprache  $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$  und

$G'$  erfüllt die  $\varepsilon$ -Regel für Typ 1, 2, 3-Grammatiken und  $G'$  ist vom Typ  $i$ .

# Leeres Wort hinzufügen geht mit Sonderregel immer

## Satz

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  vom Typ  $i \in \{1, 2, 3\}$  mit  $\varepsilon \notin L(G)$ . Sei  $S' \notin V$ .  
Dann erzeugt  $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S' \rightarrow r \mid S \rightarrow r \in P\}, S')$  die Sprache  $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$  und  $G'$  erfüllt die  $\varepsilon$ -Regel für Typ 1, 2, 3-Grammatiken und  $G'$  ist vom Typ  $i$ .

Beweis:

- ▶ Da  $S'$  neu ist, kommt  $S'$  auf keiner rechten Seite vor.
- ▶ Da  $S \rightarrow r \in P$  vom Typ  $i$  sind, sind auch  $S' \rightarrow r$  vom Typ  $i$ .
- ▶ Da  $S' \Rightarrow \varepsilon$ , gilt  $\varepsilon \in L(G')$ .
- ▶ Für  $w \neq \varepsilon$  gilt:  $S \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $S' \Rightarrow_{G'}^* w$ .  
Der jeweils erste Ableitungsschritt muss ausgetauscht werden, d.h.  $S \Rightarrow_G r$  vs.  $S' \Rightarrow_{G'} r$ . □

# $\varepsilon$ -Produktionen für Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Sonderregel für Typ 2- und Typ 3-Grammatiken:

## $\varepsilon$ -Produktionen in kontextfreien und regulären Grammatiken

In Grammatiken des Typs 2 und des Typs 3 erlauben wir Produktionen von der Form  $A \rightarrow \varepsilon$  (sogenannte  $\varepsilon$ -Produktionen).

Das ist keine echte Erweiterung, denn:

### Satz (Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen)

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine kontextfreie (bzw. reguläre) Grammatik mit  $\varepsilon \notin L(G)$ . Dann gibt es eine kontextfreie (bzw. reguläre) Grammatik  $G'$  mit  $L(G) = L(G')$  und  $G'$  enthält keine  $\varepsilon$ -Produktionen.

Beweis: Algorithmus auf der übernächsten Folie.



## Beispiel: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen

---

Grammatik mit  $\varepsilon$ -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$$

►  $L(G) = \{001, 01, 1\}$

## Beispiel: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen

Grammatik **mit**  $\varepsilon$ -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$$

►  $L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Grammatik **ohne**  $\varepsilon$ -Produktion:

$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$  mit

$$P' = \{S \rightarrow AA1, S \rightarrow A1, S \rightarrow 1, A \rightarrow 0\}$$

►  $L(G') = \{001, 01, 1\}$

- Die neuen Produktionen  $S \rightarrow A1$ ,  $S \rightarrow 1$  nehmen den Ableitungsschritt  $A \rightarrow \varepsilon$  vorweg.

# Algorithmus 1: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen

**Eingabe:** Typ  $i$ -Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $\varepsilon \notin L(G)$ ,  $i \in \{2, 3\}$

**Ausgabe:** Typ  $i$ -Grammatik  $G'$  ohne  $\varepsilon$ -Produktionen, sodass  $L(G) = L(G')$

**Beginn**

finde die Menge  $W \subseteq V$  aller Variablen  $A$  für die gilt  $A \Rightarrow^* \varepsilon$ :

**Beginn**

$W := \{A \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in P\};$

**wiederhole**

füge alle  $A$  zu  $W$  hinzu mit  $A \rightarrow A_1 \dots A_n \in P$  und  $\forall i : A_i \in W$ ;

**bis** sich  $W$  nicht mehr ändert;

**Ende**

$P' := P \setminus \{A \rightarrow \varepsilon \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in P\};$

*/\* lösche Regeln  $A \rightarrow \varepsilon$  \*/*

**wiederhole**

**für alle** Produktionen  $A' \rightarrow uAv \in P'$  mit  $|uv| > 0$  und  $A \in W$  **tue**

füge die Produktion  $A' \rightarrow uv$  zu  $P'$  hinzu;

*/\* für  $A' \rightarrow u'Av'Aw'$  gibt es (mindestens) zwei Hinzufügungen: Für das Vorkommen von  $A$  nach  $u'$  als*

*auch für das Vorkommen direkt vor  $w'$*

*\*/*

**Ende**

**bis** sich  $P'$  nicht mehr ändert;

gib  $G' = (V, \Sigma, P', S)$  als Ergebnisgrammatik aus;

**Ende**

# Algorithmus 1: Entfernen von $\epsilon$ -Produktionen

**Eingabe:** Typ  $i$ -Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $\epsilon \notin L(G)$ ,  $i \in \{2, 3\}$

**Ausgabe:** Typ  $i$ -Grammatik  $G'$  ohne  $\epsilon$ -Produktionen, sodass  $L(G) = L(G')$

**Beginn**

finde die Menge  $W \subseteq V$  aller Variablen  $A$  für die gilt  $A \Rightarrow^* \epsilon$ :

**Beginn**

$W := \{A \mid (A \rightarrow \epsilon) \in P\};$

**wiederhole**

füge alle  $A$  zu  $W$  hinzu mit  $A \rightarrow A_1 \dots A_n \in P$

**bis** sich  $W$  nicht mehr ändert;

**Ende**

$P' := P \setminus \{A \rightarrow \epsilon \mid (A \rightarrow \epsilon) \in P\};$

**wiederhole**

**für alle** Produktionen  $A' \rightarrow uAv \in P'$  mit  $|uv| > 0$  und  $A \in W$  **tue**

füge die Produktion  $A' \rightarrow uv$  zu  $P'$  hinzu;

*/\* für  $A' \rightarrow u'Av'Aw'$  gibt es (mindestens) zwei Hinzufügungen: Für das Vorkommen von  $A$  nach  $u'$  als auch für das Vorkommen direkt vor  $w'$  \*/*

**Ende**

**bis** sich  $P'$  nicht mehr ändert;

gib  $G' = (V, \Sigma, P', S)$  als Ergebnisgrammatik aus;

**Ende**

Die neuen Produktionen nehmen den Ableitungsschritt  $A \rightarrow \epsilon$  vorweg.

Für reguläre Produktion  $A' \rightarrow aA$  wird  $A' \rightarrow a$  hinzugefügt (bleibt regulär).

*/\* lösche Regeln  $A \rightarrow \epsilon$  \*/*

## Beispiel: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen (2)

---

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$$

## Beispiel: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen (2)

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$$

- Menge  $W$  der Variablen, die  $\varepsilon$  herleiten:

$$W = \{A, C\} \text{ da } A \rightarrow \varepsilon \text{ und } C \rightarrow AAA$$

## Beispiel: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen (2)

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$$

- ▶ Menge  $W$  der Variablen, die  $\varepsilon$  herleiten:

$$W = \{A, C\} \text{ da } A \rightarrow \varepsilon \text{ und } C \rightarrow AAA$$

- ▶ Starte mit

$$P' = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$$

## Beispiel: Entfernen von $\varepsilon$ -Produktionen (2)

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$  mit

$$P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$$

- ▶ Menge  $W$  der Variablen, die  $\varepsilon$  herleiten:

$$W = \{A, C\} \text{ da } A \rightarrow \varepsilon \text{ und } C \rightarrow AAA$$

- ▶ Starte mit

$$P' = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, B \rightarrow 0, \\ B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$$

- ▶ Hinzufügen von Produktionen für Vorkommen von  $A$  und  $C$

$$P' = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D, \\ B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A, \\ D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}$$