Grammatiken und die Chomsky-Hierarchie

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik

Stand: 18. April 2023
Folien ursprünglich von PD Dr. David Sabel

Formale Sprachen darstellen

- Sei Σ ein Alphabet.
- Eine Sprache über Σ ist eine Teilmenge von Σ^*.
- Z.B. für $\Sigma = \{(,), +, -, *, /, a\}$ sei
  L_{ArEx} die Sprache aller korrekt geklammerten Ausdrücke.

  Z.B. $((a + a) - a) * a \in L_{ArEx}$ aber $(a-) + a) \notin L_{ArEx}$.

- Unsere bisherigen Operationen auf Sprachen (Mengen) können das nicht darstellen.

Benötigt: Formalismus, um L_{ArEx} zu beschreiben

Formale Sprachen darstellen (2)

Anforderungen:

- **Endliche** Beschreibung
- Sprache selbst muss aber auch unendlich viele Objekte erlauben

Zwei wesentliche solchen Formalismen sind

- Grammatiken
- Automaten

Grammatiken

Grammatik für einen sehr kleinen Teil der deutschen Sprache:

<Satz> → <Subjekt><Prädikat><Objekt>
<Subjekt> → <Artikel><Attribut><Nomen>
<Objekt> → <Artikel><Attribut><Nomen>
<Artikel> → ε
<Artikel> → der
<Artikel> → das
<Attribut> → <Adjektiv>
<Attribut> → <Adjektiv><Attribut>
<Adjektiv> → kleine
<Adjektiv> → große
<Adjektiv> → nette
<Adjektiv> → blaue
<Nomen> → Frau
<Nomen> → Mann
<Nomen> → Auto
<Prädikat> → fährt
<Prädikat> → liebt

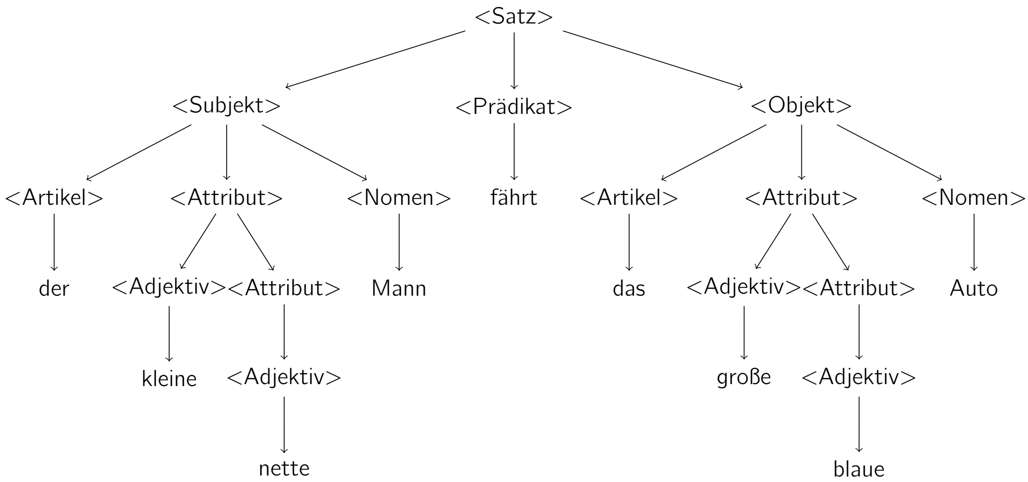
Grammatiken

- Endliche Menge von Regeln „linke Seite $\rightarrow$ rechte Seite”
- Symbole in spitzen Klammern wie <Artikel> sind Variablen, d.h. sie sind Platzhalter, die weiter ersetzt werden müssen.
- Z.B. kann

  „der kleine nette Mann fährt das große blaue Auto“

  durch die vorige Grammatik abgeleitet werden.

Syntaxbaum zum Beispiel



Definition einer Grammatik

Definition (Grammatik)

Eine **Grammatik** ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- V ist eine endliche Menge von **Variablen**
  (alternativ Nichtterminale, Nichtterminalsymbole)
- Σ (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$) ist ein **Alphabet** von **Zeichen**
  (alternativ **Terminale**, Terminalsymbole)
- P ist eine endliche Menge von **Produktionen** von der Form $\ell \to r$ wobei $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$
  (alternativ Regeln)
- $S \in V$ ist das **Startsymbol**
  (alternativ Startvariable)

Manchmal genügt es, P alleine zu notieren
(wenn klar ist, was Variablen, Zeichen und Startsymbol sind)

Beispiel für eine Grammatik

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit

$$
\begin{aligned}
V &= \{E, M, Z\}, \\
\Sigma &= \{+\,, *, 1, 2, (,)\} \\
P &= \{E \;\rightarrow\; M, \\
&\qquad E \;\rightarrow\; E + M, \\
&\qquad M \;\rightarrow\; Z, \\
&\qquad M \;\rightarrow\; M * Z, \\
&\qquad Z \;\rightarrow\; 1, \\
&\qquad Z \;\rightarrow\; 2, \\
&\qquad Z \;\rightarrow\; (E)\}
\end{aligned}
$$

Ableitung

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

Ableitungsschritt $\Rightarrow_G$

Eine Satzform ist ein Wort aus $(V \cup \Sigma)^*$. Für Satzformen u, v sagen wir:

u geht unter Grammatik G unmittelbar in v über, $u \Rightarrow_G v$, wenn

$$u = w_1 \ell w_2 \text{ und } v = w_1 r w_2 \text{ mit } (\ell \to r) \in P$$

- Wenn G klar ist, schreiben wir $u \Rightarrow v$ statt $u \Rightarrow_G v$
- $\Rightarrow_G^*$ sei die reflexiv-transitive Hülle von $\Rightarrow_G$

Ableitung

Eine Folge $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_0 = S$, $w_n \in \Sigma^*$ und $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt Ableitung von w_n. Statt $(w_0, \ldots, w_n)$ schreiben wir auch $w_0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{rlllllllllll} P = \{ & E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M \to M * Z, \\ & Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{ E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E)$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{rlllllllllllll} P = \{ E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M)$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{array}{l} E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \end{array}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} &E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ &\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{ E &\rightarrow M, & E &\rightarrow E + M, & M &\rightarrow Z, & M &\rightarrow M * Z, \\ Z &\rightarrow 1, & Z &\rightarrow 2, & Z &\rightarrow (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{rlllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E+M, & M & \to & Z, & M & \to & M*Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\ Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \} \end{array}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$
\begin{array}{llllllllllll}
P = \{E & \to & M, & E & \to & E + M, & M & \to & Z, & M & \to & M * Z, \\
Z & \to & 1, & Z & \to & 2, & Z & \to & (E) & & & \}
\end{array}
$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$
\begin{aligned}
& E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\
& \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\
& \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\
& \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\
& \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{E &\to M, & E &\to E + M, & M &\to Z, & M &\to M * Z, \\ Z &\to 1, & Z &\to 2, & Z &\to (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\rightarrow M, & E &\rightarrow E + M, & M &\rightarrow Z, & M &\rightarrow M * Z, \\ Z &\rightarrow 1, & Z &\rightarrow 2, & Z &\rightarrow (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel

$$G = (V, \Sigma, P, E) \text{ mit } V = \{E, M, Z\} \text{ und } \Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} P = \{E &\rightarrow M, & E &\rightarrow E + M, & M &\rightarrow Z, & M &\rightarrow M * Z, \\ Z &\rightarrow 1, & Z &\rightarrow 2, & Z &\rightarrow (E) & & \} \end{aligned}$$

Eine Ableitung von (2+1) * (2+2):

$$\begin{aligned} & E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M) \\ & \Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z) \\ & \Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2) \\ & \Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \\ & \Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2) \end{aligned}$$

Beispiel: Ableitungen sind nicht eindeutig

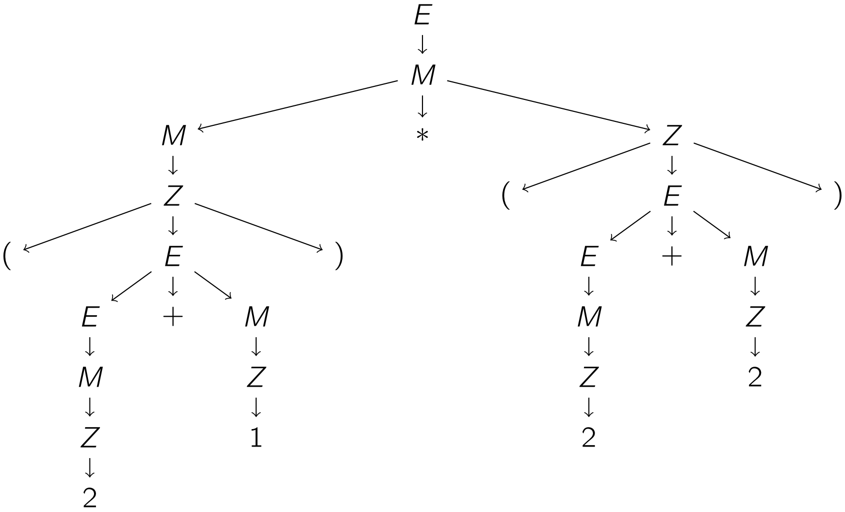
Ableitung von letzter Folie (keine Linksableitung):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Linksableitung: ersetzt immer die linkeste Variable

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow (E) * Z$$
$$\Rightarrow (E + M) * Z \Rightarrow (M + M) * Z \Rightarrow (Z + M) * Z$$
$$\Rightarrow (2 + M) * Z \Rightarrow (2 + Z) * Z \Rightarrow (2 + 1) * Z \Rightarrow (2 + 1) * (E)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (E + M) \Rightarrow (2 + 1) * (M + M) \Rightarrow (2 + 1) * (Z + M)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + M) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + Z)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Syntaxbaum (zu beiden Ableitungen)



Nichtdeterminismus beim Ableiten

Für eine Satzform u kann es verschiedene Satzformen v geben mit $u \Rightarrow_G v$.

Quellen des Nichtdeterminismus:

- Wähle **welche Produktion** $\ell \to r$ aus P angewendet wird.
- Wähle die **Position des Teilworts** ℓ in u, das durch r ersetzt wird.

Aber: Es gibt **nur endlich viele Satzformen** v für jeden Schritt.

Erzeugte Sprache

Erzeugte Sprache einer Grammatik

Die von einer Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ **erzeugte Sprache** $L(G)$ ist

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiele

$$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$$
$$L(G_1) = \textbf{?}$$

$$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$$
$$L(G_2) = \textbf{?}$$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \textbf{?}$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \dots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \textbf{?}$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) =$ **?**

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = $ **?**

- $$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \\
b & ab & aab & aaab & aaaab &
\end{tikzcd}$$
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $S \Rightarrow^i a^i S \Rightarrow a^i b$

Beispiele

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \ldots$ endet nie
- Andere Ableitungen gibt es nicht
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar

$G_2 = (\{S'\}, \{a, b\}, \{S' \to aS', S' \to b\}, S')$
$L(G_2) = \{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaaS' \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \\ b & ab & aab & aaab & aaaab & \end{tikzcd}$$
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $S \Rightarrow^i a^i S \Rightarrow a^i b$

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt $\ell \in V$

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

G ist vom Typ 0

G ist automatisch vom Typ 0

G ist vom Typ 1 (kontextsensitive Grammatik), wenn ...

für alle $(\ell \to r) \in P$: $|\ell| \leq |r|$

G ist vom Typ 2 (kontextfreie Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 1 und für alle $(\ell \to r) \in P$ gilt $\ell \in V$

G ist vom Typ 3 (reguläre Grammatik), wenn ...

G ist vom Typ 2 und für alle $(A \to r) \in P$ gilt: $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$
(die rechten Seiten sind Wörter aus $\Sigma \cup \Sigma V$)

Typ i-Sprachen

Definition

Für $i = 0, 1, 2, 3$ nennt man eine formale **Sprache** $L \subseteq \Sigma^*$ **vom Typ** i, falls es eine Typ i-Grammatik G gibt, sodass $L(G) = L$ gilt.

Spricht man von **dem Typ einer formalen Sprache**, so ist meistens der größtmögliche Typ gemeint.

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aS, S \rightarrow b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$
  $\qquad Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$
  $Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)
- $G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to aSBC,\ \ S \to aBC,\ \ CB \to BC,\ \ aB \to ab,$
  $bB \to bb,\ \ bC \to bc,\ \ cC \to cc\}$ ist kontextsensitiv (Typ 1)

Beispiele

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist regulär (Typ 3)
- $G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
  $P = \{E \to M,\ \ E \to E + M,\ \ M \to Z,\ \ M \to M * Z,$
  $Z \to 1,\ \ Z \to 2,\ \ Z \to (E)\}$ ist kontextfrei (Typ 2)
- $G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to aSBC,\ \ S \to aBC,\ \ CB \to BC,\ \ aB \to ab,$
  $bB \to bb,\ \ bC \to bc,\ \ cC \to cc\}$ ist kontextsensitiv (Typ 1)
- $G_4 = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
  $P = \{S \to \$T\$,\ \ T \to aAT,\ \ T \to bBT,\ \ T \to \varepsilon,\ \ \$a \to a\$,$
  $\$b \to b\$,\ \ Aa \to aA,\ \ Ab \to bA,\ \ Ba \to aB,\ \ Bb \to bB,$
  $A\$ \to \$a,\ \ B\$ \to \$b,\ \ \$\$ \to \varepsilon\}$ ist vom Typ 0