LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2019

Zentralübung 11.07.2019: Unentscheidbarkeit von Grammatik-Problemen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 11. Juli 2019

Wiederholung: Unentscheidbarkeit mittels Reduktion zeigen

Definition (Reduktion (einer Sprache auf eine andere))

Sei $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen.
Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$

Lemma

Sei $L_1 \leq L_2$ und L_1 ist unentscheidbar.
Dann ist auch L_2 unentscheidbar.

Ziel und Vorgehen

- Unentscheidbarkeit einiger Probleme für kontextfreie Grammatiken nachweisen
- Meistens reduzieren wir 01-PCP auf das Problem

Wiederholung: Postschen Korrespondenzproblem

Definition (Postsches Korrespondenzproblem)

Gegeben sei ein Alphabet Σ und eine Folge von Wortpaaren $K = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)\}$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$. Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP) ist die Frage, ob es für die gegebene Folge K eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_m$ mit $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ gibt, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ gilt.

01-PCP $= \Sigma$ ist binär, z.B. $\Sigma = \{a, b\}$

Jetzt

Vorüberlegung: Funktion F, die K in $F(K) = (G_1, G_2)$ mit G_1, G_2, CFGs übersetzt.

„F: 01-PCP $\to (G_1, G_2)$“

$G_1 = (\{S, A, B\}, \Sigma \dot\cup \{\$, 1, \ldots, k\}, P_1, S)$ wobei P_1 sind:

$$\begin{aligned} &S \to A\$B \\ &A \to 1Ax_1 \mid \ldots kAx_k \\ &A \to 1x_1 \mid \ldots kx_k \\ &B \to \overline{y_1}B1 \mid \ldots \overline{y_k}Bk \\ &B \to \overline{y_1}1 \mid \ldots \overline{y_k}k \end{aligned}$$

wobei $\overline{y_i}$ das Wort y_i in umgedrehter Form ist.

$L(G_1)$ enthält daher genau die Worte

$$i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \$ \overline{y_{j_m}} \cdots \overline{y_{j_1}} j_1 \cdots j_m,$$

wobei $n, m \geq 1$ und $i_r, j_s \in \{1, \ldots, k\}$.

„F: 01-PCP $\to (G_1, G_2)$“ (2)

Die Grammatik G_2 ist $G_2 = (\{S, T\}, \Sigma \dot\cup \{\$, 1, \ldots, k\}, P_2, S)$, sodass P_2 aus den folgenden Produktionen besteht:

$$\begin{aligned} &S \to 1S1 \mid \ldots \mid kSk \mid T \\ &T \to a_1Ta_1 \mid \ldots\ a_nTa_n \mid \$ \end{aligned}$$

$L(G_2)$ enthält daher genau die Worte

$$i_1 \cdots i_n u \$ \overline{u} i_n \cdots i_1$$

mit $u \in \Sigma^*$, $i_j \in \{1, \ldots, k\}$, $n \geq 0$.

Worte im Schnitt $L(G_1) \cap L(G_2)$

- $L(G_1)$ enthält genau die Worte

  $$i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \$ \overline{y_{j_m}} \cdots \overline{y_{j_1}} j_1 \cdots j_m,$$

  wobei $n, m \geq 1$ und $i_r, j_s \in \{1, \ldots, k\}$.
- $L(G_2)$ enthält genau die Worte

  $$i_1 \cdots i_n u \$ \overline{u} i_n \cdots i_1$$

  mit $u \in \Sigma^*$, $i_j \in \{1, \ldots, k\}$, $n \geq 0$.
- Worte in $L(G_1) \cap L(G_2)$:

  $$i_n \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \$ \overline{y_{i_n}} \cdots \overline{y_{i_1}} i_1 \cdots i_n$$

  mit $n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$.
- Daher $i_1, \ldots, i_n$ ist Lösung von K gdw. Wort im Schnitt.

Schnittproblem für CFGs

Aufgabe

Zeige: Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken (also die Frage, ob $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ für Grammatiken G_1, G_2 gilt), ist unentscheidbar.

Beweis: Obige Funktion F zeigt, dass 01-PCP auf das Schnittproblem reduzierbar ist. Die Unentscheidbarkeit von 01-PCP impliziert daher die Unentscheidbarkeit des Schnittproblems.

Schnitt endlich-Problem

Aufgabe

Zeige: Das Problem, ob für kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 gilt, $L(G_1) \cap L(G_2) = \infty$, ist unentscheidbar.

Beweis:

- Wenn $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$, dann gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \infty$, da man die 01-PCP-Lösungsfolge beliebig oft wiederholen kann.
- Daher K hat 01-PCP-Lösung g.d.w. $L(G_1) \cap L(G_2) = \infty$
- Daher liefert $F(K) = (G_1, G_2)$ auch eine Reduktion von 01-PCP in das Schnitt endlich-Problem.

Schnitt $L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht kontextfrei

Man kann zeigen, dass der Schnitt $L(G_1) \cap L(G_2)$ wenn er nicht leer ist, nicht kontextfrei ist.
Wesentliches Argument im Pumping-Lemma-Beweis:
Für Wort

$$(i_n \cdots i_1)^o (x_{i_1} \cdots x_{i_n})^o \$ (\overline{y_{i_n}} \cdots \overline{y_{i_1}})^o (i_1 \cdots i_n)^o$$

mit Mindestlänge o, kann die Zerlegung in $uvwxy$, das Teilwort vwx nur in maximal zwei der vier $(\cdots)^o$-Teilworte legen. Dann kann man stets aus der Sprache herauspumpen, da alle 4 $(\cdots)^o$-Teile über $i_1, \ldots, i_n$ miteinander verbunden sind.

Kontextfreier Schnitt-Problem

Aufgabe

Zeige: Das Problem, ob der Schnitt zwei kontextfreier Sprachen kontextfrei ist, ist unentscheidbar.

Beweis:

- 01-PCP-Instanz K unlösbar g.d.w. für $F(K) = (G_1, G_2)$, $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei.
- Daher haben wir das Komplement von 01-PCP auf das Schnittproblem reduziert.
- Da 01-PCP unentscheidbar, ist auch das Komplement unentscheidbar und damit folgt der Satz.

Komplemente

$L(G_1)$ und $L(G_2)$ mit $F(K) = (G_1, G_2)$ sind sogar deterministisch-kontextfrei.

Begründung: DPDA konstruierbar
Daher:

- Komplemente von $L(G_1), L(G_2)$ sind auch deterministisch kontextfrei
- Grammatiken dafür sind berechenbar (ohne Beweis, siehe Literatur)
- Für $i = 1, 2$ sei G_i' die Grammatik mit $\overline{L(G_i)} = L(G_i')$ und sei $F_i(G_i) = G_i'$.

Inklusionsproblem

Aufgabe

Zeige: Das Problem, ob für zwei gegebene kontextfreie Grammatiken G_A, G_B gilt: $L(G_A) \subseteq L(G_B)$ ist unentscheidbar.

Beweis:

- Sei K Instanz des 01-PCP.
- Sei $F''(K) = (G_1, G_2')$ (wobei $F(K) = (G_1, G_2)$ und $G_2' = F_i(G_2)$.
- Dann ist K genau dann unlösbar, wenn $L(G_1) \subseteq L(G_2')$ gilt, denn: $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ g.d.w. $L(G_1) \subseteq \overline{L(G_2)}$).
- Daher ist das Komplement von 01-PCP auf das Inklusionsproblem reduzierbar.
- Da 01-PCP unentscheidbar ist, auch das Komplement von 01-PCP unentscheidbar, und damit isit auch das Inklusionsproblem unentscheidbar.

Äquivalenzproblem

Aufgabe

Zeige: Das Problem, ob für zwei gegebene kontextfreie Grammatiken G_A, G_B gilt: $L(G_A) = L(G_B)$ ist unentscheidbar.

Beweis:

- Sei K Instanz des 01-PCP.
- Sei $F'(K) = (G_3, G_2')$ (wobei $F(K) = (G_1, G_2)$ und $G_2' = F_i(G_2)$ und $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2')$
- Dann ist K genau dann unlösbar, wenn $L(G_3) = L(G_2')$ gilt, denn: $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ g.d.w. $L(G_1) \subseteq \overline{L(G_2)}$ g.d.w. $L(G_1) \cup \overline{L(G_2)} = \overline{L(G_2)}$.
- Daher ist das Komplement von 01-PCP auf das Äquivalenzproblem reduzierbar.
- Da das Komplement von 01-PCP unentscheidbar, ist auch das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Mehrdeutigkeitsproblem

Aufgabe

Zeige: Das Problem, ob eine kontextfreie Grammatik G mehrdeutig ist, ist unentscheidbar.

Beweis:

- Sei K Instanz des 01-PCP.
- Sei $F_3(K) = G_4$ (wobei $F(K) = (G_1, G_2)$ und $L(G_4) = L(G_1) \cup L(G_2)$
- Dann ist K genau dann lösbar, wenn G_4 mehrdeutig ist.
- Das gilt, da bei Lösbarkeit, Worte im Schnitt von $L(G_1)$ und $L(G_2)$ existieren, die mit 2 verschiedenen Syntaxbäumen hergeleitet werden können.
- Daher ist 01-PCP auf das Mehrdeutigkeitsproblem reduzierbar.
- Da 01-PCP unentscheidbar ist auch das Mehrdeutigkeitsproblem unentscheidbar.

Regularitätsproblem

Aufgabe

Zeige: Das Problem, ob für CFG G, $L(G)$ regulär ist, ist unentscheidbar.

Beweis:

- Sei K Instanz des 01-PCP.
- Sei $F_4(K) = G_5$ wobei $F(K) = (G_1, G_2)$ und $L(G_5) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$
- Wenn K unlösbar, dann $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset = \overline{\overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}}$ und daher $L(G_5) = \Sigma^*$ und daher $L(G_5)$ regulär.
- Wenn K lösbar, dann $L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht kontextfrei (und daher auch nicht regulär) und $\overline{\overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}} = \overline{L(G_5)}$ nicht kontextfrei (und daher nicht regulär). Da reguläre Sprachen abgeschlossen unter Komplementbildung,kann $L(G_5)$ auch nicht regulär sein.
- Damit haben wir das Komplement von 01-PCP auf das Regularitätsproblem reduziert.