LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2019

Zentralübung 13.06.2019: Kellerautomaten, Akzeptanz mit Endzuständen, Turingmaschinen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 13. Juni 2019

PDAs entwerfen (1)

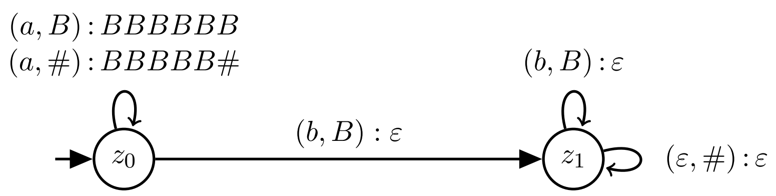
Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5\cdot n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

- Keller $= \underbrace{B \cdots B}_{i \text{ mal}}\#$: noch i mal b lesen.



PDAs entwerfen (2)

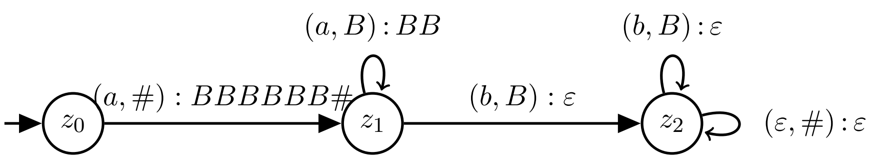
Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5+n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

- Keller $= \underbrace{B \cdots B}_{i \text{ mal}}\#$: noch i mal b lesen.



PDAs entwerfen (3)

Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Sprache

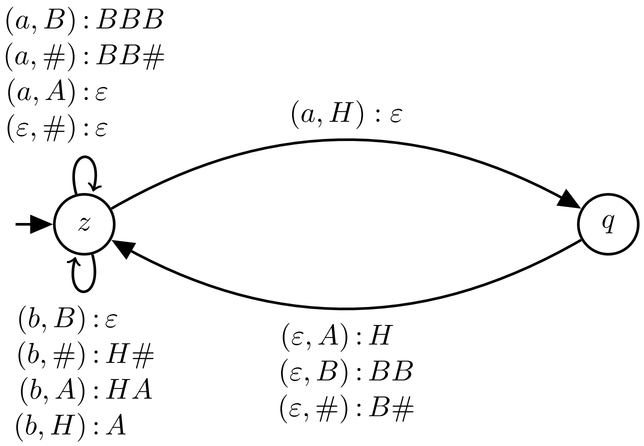
$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid 2 \cdot \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

kontextfrei ist. Hinweis: Entwerfen Sie einen PDA für L.

Ideen:

- Für jedes Vorkommen eines a müssen zwei b's vorkommen.
- Wir können uns im Keller „merken" wieviele a's oder b's noch gelesen werden müssen:
  - Keller $= \underbrace{B \cdots B}_{i-mal}\#$ lese noch i-mal b
  - Keller $= \underbrace{A \cdots A}_{i-mal}\#$ lese noch i-mal a
  - Keller $= \underbrace{HA \cdots A}_{i-mal}\#$ lese noch i+0,5-mal a

PDAs entwerfen (4)



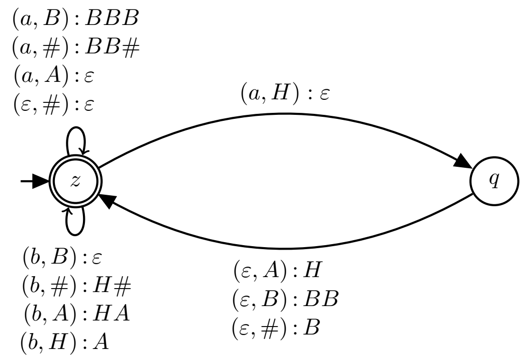
Der Zustand q dient dazu, auf das vorletzte Kellersymbol zuzugreifen: Im Fall $\delta(z,a,H)$ wird ein halbes a im Keller verlangt, aber ein ganzes a gelesen: Passe Keller mit dem Symbol unter H an.

PDAs entwerfen (5)

Aufgabe

Zeige, dass der PDA $abbbaabbb$ erkennt (durch Angabe eines Laufs)

$$
\begin{aligned}
& (z, abbbaabbb, \#) \\
\vdash\ & (z, bbbaabbb, BB\#) \\
\vdash\ & (z, bbaabbb, B\#) \\
\vdash\ & (z, baabbb, \#) \\
\vdash\ & (z, aabbb, H\#) \\
\vdash\ & (q, abbb, \#) \\
\vdash\ & (z, abbb, B\#) \\
\vdash\ & (z, bbb, BBB\#) \\
\vdash\ & (z, bb, BB\#) \\
\vdash\ & (z, b, B\#) \\
\vdash\ & (z, \varepsilon, \#) \\
\vdash\ & (z, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$



Akzeptanzbedingungen für PDAs

Zur Erinnerung:
Ein PDA akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Ein PDA mit Endzuständen akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, W) \text{ und } q \in E\}.$$

Akzeptieren durch Endzustände → Akzeptieren bei leerem Keller

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass gilt $L(M) = L(M')$.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein Kellerautomat mit Endzuständen. Transformation in äquivalenten PDA M', der durch leeren Keller akzeptiert:

- M' darf nicht in eine Konfiguration laufen mit: leerem Keller, leerer Eingabe, Zustand $z \notin E$
- Wenn M' in $z \in E$ ist und Eingabe leer, muss M' den Keller leeren.
- Neues Kellersymbol wird direkt am Anfang in den Keller gelegt. Verhindert, dass der Keller „zu früh“ leer wird.
- Neuer Startzustand, um das neue Symbol in den Keller zu legen.
- Zusätzlicher Zustand zum Leeren des Kellers.

Akzeptieren durch Endzustände → Akzeptieren bei leerem Keller (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z_0', z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z_0', \$)$ wobei δ':

1. $\delta'(z_0', \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$)\}$ und
   $\delta'(z_0', a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.
   vom neuen Startzustand z_0' wird in den alten Startzustand z_0 übergegangen, aber $\$$ ganz unten in den Keller gelegt.
2. $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z, a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$.
   die alten Übergänge von M gelten auch in M'
3. $(z_E, A) \in \delta'(z, \varepsilon, A)$ für alle $z \in E$, $A \in \Gamma \cup \{\$\}$.
   wenn M akzeptiert, wechselt M' in Zustand z_E
4. $(z_E, \varepsilon) \in \delta'(z_E, \varepsilon, A)$ für alle $A \in \Gamma \cup \{\$\}$.
   in Zustand z_E wird der Keller geleert, damit M' akzeptiert

Akzeptieren bei leerem Keller → Akzeptieren durch Endzustände

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat M kann ein Kellerautomat mit Endzuständen M' konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat.
Transformation in einen äquivalenten PDA M' mit Endzuständen:

- Endzustand hinzufügen zum Akzeptieren
- Zusätzliches Kellersymbol, damit der PDA nach Abarbeitung noch in den Endzustand wechseln kann
- Zusätzlicher Startzustand, um das neue Kellersymbol in den Keller zu legen

Akzeptieren bei leerem Keller → Akzeptieren durch Endzustände (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z_0', z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z_0', \$, \{z_E\})$, mit

1. $\delta'(z_0', \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$)\}$ und $\delta'(z_0', a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.
   $\$$ wird in den Keller gelegt. und in den alten Startzustand gewechselt.
2. $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z, a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$
   $\$$ Übergänge von M auch in M' möglich
3. $(z_E, \varepsilon) \in \delta'(z, \varepsilon, \$)$ für alle $z \in Z$
   Wechsel in den akzeptierenden Zustand und entfernen von $\$$.
   M hat in diesem Fall schon akzeptiert.

Die beiden Beweise zeigen:

Satz

PDAs mit Endzuständen und PDAs ohne Endzustände (mit Akzeptanz durch leeren Keller) sind äquivalente Formalismen.

Beachte: Bei DPDAs gilt dieses Resultat nicht (s. Übung)

Turingmaschinen

Aufgabe

Geben Sie eine Turingmaschine an, die ihrer Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ um eine Position nach links auf dem Band verschiebt.

Sei $M = (\{z_0, z_{w0}, z_{w1}, z_e, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ mit

δ	z_0	z_1	z_{w0}	z_{w1}	z_e
0	$(z_0, 0, R)$	$(z_{w0}, \Box, L)$	$(z_{w0}, 0, L)$	$(z_{w0}, 1, L)$	$(z_e, 0, N)$
1	$(z_0, 1, R)$	$(z_{w1}, \Box, L)$	$(z_{w1}, 0, L)$	$(z_{w1}, 1, L)$	$(z_e, 1, N)$
$\Box$	$(z_1, \Box, L)$	$(z_1, \Box, N)$	$(z_e, 0, L)$	$(z_e, 1, L)$	$(z_e, \Box, N)$

- z_0: Suche rechtes Ende und wechsle in z_1
- z_1: Merke letztes Zeichen im Zustand (z_{wi}, $i \in \{0,1\}$) & ersetze durch $\Box$.
- z_{wi}: Für $i, j \in \{0,1\}$: Ersetze aktuelles Zeichen j durch i, gehe nach links und wechsele in z_{wj}.
  Wenn aktuelles Zeichen $\Box$: Dann ersetze $\Box$ durch i und akzeptiere in z_e
- z_e: Akzeptiere

Turingmaschinen

Beachte: Das Verschieben der Eingabe um eine Position nach links, ist eher sinnlos (da Band unendlich groß)