

Zentralübung 13.06.2019: Kellerautomaten, Akzeptanz mit Endzuständen, Turingmaschinen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5 \cdot n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5 \cdot n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

- Keller = $\underbrace{B \cdots B}_{i \text{ mal}} \#$: noch i mal b lesen.

PDAs entwerfen (1)

Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5 \cdot n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

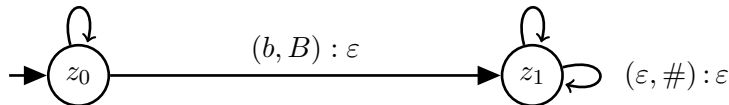
akzeptiert.

- Keller = $\underbrace{B \cdots B}_{i \text{ mal}} \#$: noch i mal b lesen.

$(a, B) : BBBB$

$(a, \#) : BBBB\#$

$(b, B) : \varepsilon$



Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5+n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5+n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

- Keller = $\underbrace{B \cdots B}_{i \text{ mal}} \#$: noch i mal b lesen.

PDAs entwerfen (2)

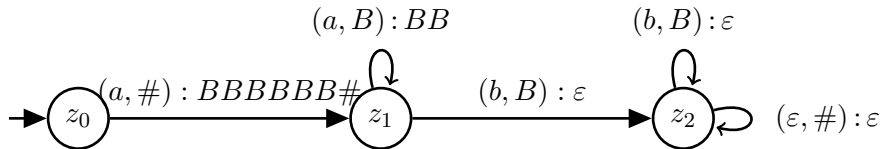
Aufgabe

Entwerfen Sie einen PDA, der die Sprache

$$L = \{a^n b^{5+n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

akzeptiert.

- Keller = $\underbrace{B \cdots B}_{i \text{ mal}} \#$: noch i mal b lesen.



Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \cdot \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

kontextfrei ist. Hinweis: Entwerfen Sie einen PDA für L .

Ideen:

- Für jedes Vorkommen eines a müssen zwei b 's vorkommen.
- Wir können uns im Keller „merken“ wieviele a 's oder b 's noch gelesen werden müssen:
 - Keller = $\underbrace{B \cdots B}_{i\text{-mal}} \#$ lese noch i -mal b
 - Keller = $\underbrace{A \cdots A}_{i\text{-mal}} \#$ lese noch i -mal a
 - Keller = $\underbrace{HA \cdots A}_{i\text{-mal}} \#$ lese noch $i+0,5$ -mal a

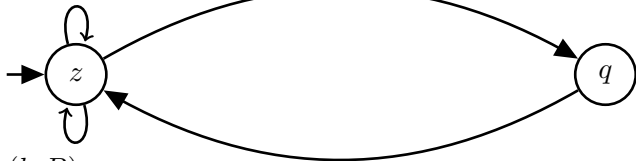
PDAs entwerfen (4)

$(a, B) : BBB$

$(a, \#) : BB\#$

$(a, A) : \varepsilon$

$(\varepsilon, \#) : \varepsilon$



$(b, B) : \varepsilon$

$(b, \#) : H\#$

$(b, A) : HA$

$(b, H) : A$

$(\varepsilon, A) : H$

$(\varepsilon, B) : BB$

$(\varepsilon, \#) : B\#$

Der Zustand q dient dazu, auf das vorletzte Kellersymbol zuzugreifen:
Im Fall $\delta(z, a, H)$ wird ein halbes a im Keller verlangt, aber ein ganzes a
gelesen: Passe Keller mit dem Symbol unter H an.

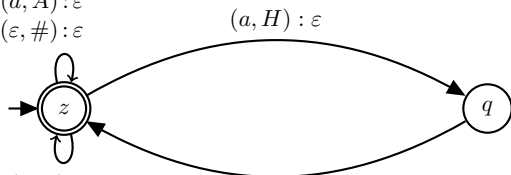
PDAs entwerfen (5)

Aufgabe

Zeige, dass der PDA $abbbaabbb$ erkennt (durch Angabe eines Laufs)

- $(z, abbbaabbb, \#)$
- $\vdash (z, bbbaabbb, BB\#)$
- $\vdash (z, bbaabbb, B\#)$
- $\vdash (z, baabbb, \#)$
- $\vdash (z, aabbb, H\#)$
- $\vdash (q, abbb, \#)$
- $\vdash (z, abbb, B\#)$
- $\vdash (z, bbb, BBB\#)$
- $\vdash (z, bb, BB\#)$
- $\vdash (z, b, B\#)$
- $\vdash (z, \varepsilon, \#)$
- $\vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$

- $(a, B) : BBB$
- $(a, \#) : BB\#$
- $(a, A) : \varepsilon$
- $(\varepsilon, \#) : \varepsilon$



- $(b, B) : \varepsilon$
- $(b, \#) : H\#$
- $(b, A) : HA$
- $(b, H) : A$
- $(\varepsilon, A) : H$
- $(\varepsilon, B) : BB$
- $(\varepsilon, \#) : B$

Zur Erinnerung:

Ein PDA akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Ein PDA mit Endzuständen akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, \#) \vdash^* (q, \varepsilon, W) \text{ und } q \in E\}.$$

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass gilt $L(M) = L(M')$.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein Kellerautomat mit Endzuständen. Transformation in äquivalenten PDA M' , der durch leeren Keller akzeptiert:

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass gilt $L(M) = L(M')$.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein Kellerautomat mit Endzuständen. Transformation in äquivalenten PDA M' , der durch leeren Keller akzeptiert:

- M' darf nicht in eine Konfiguration laufen mit:
leerem Keller, leerer Eingabe, Zustand $z \notin E$
- Wenn M' in $z \in E$ ist und Eingabe leer, muss M' den Keller leeren.

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass gilt $L(M) = L(M')$.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein Kellerautomat mit Endzuständen. Transformation in äquivalenten PDA M' , der durch leeren Keller akzeptiert:

- M' darf nicht in eine Konfiguration laufen mit:
leerem Keller, leerer Eingabe, Zustand $z \notin E$
- Wenn M' in $z \in E$ ist und Eingabe leer, muss M' den Keller leeren.
- Neues Kellersymbol wird direkt am Anfang in den Keller gelegt.
Verhindert, dass der Keller „zu früh“ leer wird.

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass gilt $L(M) = L(M')$.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein Kellerautomat mit Endzuständen. Transformation in äquivalenten PDA M' , der durch leeren Keller akzeptiert:

- M' darf nicht in eine Konfiguration laufen mit:
leerem Keller, leerer Eingabe, Zustand $z \notin E$
- Wenn M' in $z \in E$ ist und Eingabe leer, muss M' den Keller leeren.
- Neues Kellersymbol wird direkt am Anfang in den Keller gelegt.
Verhindert, dass der Keller „zu früh“ leer wird.
- Neuer Startzustand, um das neue Symbol in den Keller zu legen.

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass gilt $L(M) = L(M')$.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein Kellerautomat mit Endzuständen. Transformation in äquivalenten PDA M' , der durch leeren Keller akzeptiert:

- M' darf nicht in eine Konfiguration laufen mit:
leerem Keller, leerer Eingabe, Zustand $z \notin E$
- Wenn M' in $z \in E$ ist und Eingabe leer, muss M' den Keller leeren.
- Neues Kellersymbol wird direkt am Anfang in den Keller gelegt.
Verhindert, dass der Keller „zu früh“ leer wird.
- Neuer Startzustand, um das neue Symbol in den Keller zu legen.
- Zusätzlicher Zustand zum Leeren des Kellers.

Akzeptieren durch Endzustände \rightarrow Akzeptieren bei leerem Keller (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$)$ wobei δ' :

Akzeptieren durch Endzustände \rightarrow Akzeptieren bei leerem Keller (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$)$ wobei δ' :

- ① $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\})$ und
 $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.

vom neuen Startzustand z'_0 wird in den alten Startzustand z_0 übergegangen, aber $\$$ ganz unten in den Keller gelegt.

Akzeptieren durch Endzustände \rightarrow Akzeptieren bei leerem Keller (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$)$ wobei δ' :

- 1 $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\}$ und
 $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.
vom neuen Startzustand z'_0 wird in den alten Startzustand z_0 übergegangen, aber $\$$ ganz unten in den Keller gelegt.
- 2 $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z, a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$.
die alten Übergänge von M gelten auch in M'

Akzeptieren durch Endzustände \rightarrow Akzeptieren bei leerem Keller (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$)$ wobei δ' :

- 1 $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\})$ und
 $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.
vom neuen Startzustand z'_0 wird in den alten Startzustand z_0 übergegangen, aber $\$$ ganz unten in den Keller gelegt.
- 2 $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z$, $a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$.
die alten Übergänge von M gelten auch in M'
- 3 $(z_E, A) \in \delta'(z, \varepsilon, A)$ für alle $z \in E$, $A \in \Gamma \cup \{\$\}$.
wenn M akzeptiert, wechselt M' in Zustand z_E

Akzeptieren durch Endzustände \rightarrow Akzeptieren bei leerem Keller (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$)$ wobei δ' :

- ① $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\})$ und
 $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.
vom neuen Startzustand z'_0 wird in den alten Startzustand z_0 übergegangen, aber $\$$ ganz unten in den Keller gelegt.
- ② $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z$, $a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$.
die alten Übergänge von M gelten auch in M'
- ③ $(z_E, A) \in \delta'(z, \varepsilon, A)$ für alle $z \in E$, $A \in \Gamma \cup \{\$\}$.
wenn M akzeptiert, wechselt M' in Zustand z_E
- ④ $(z_E, \varepsilon) \in \delta'(z_E, \varepsilon, A)$ für alle $A \in \Gamma \cup \{\$\}$.
in Zustand z_E wird der Keller geleert, damit M' akzeptiert

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat M kann ein Kellerautomat mit Endzuständen M' konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat.

Transformation in einen äquivalenten PDA M' mit Endzuständen:

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat M kann ein Kellerautomat mit Endzuständen M' konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat.

Transformation in einen äquivalenten PDA M' mit Endzuständen:

- Endzustand hinzufügen zum Akzeptieren

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat M kann ein Kellerautomat mit Endzuständen M' konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat.

Transformation in einen äquivalenten PDA M' mit Endzuständen:

- Endzustand hinzufügen zum Akzeptieren
- Zusätzliches Kellersymbol, damit der PDA nach Abarbeitung noch in den Endzustand wechseln kann

Aufgabe

Zeige: Für jeden Kellerautomat M kann ein Kellerautomat mit Endzuständen M' konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt.

Gegeben $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein Kellerautomat.

Transformation in einen äquivalenten PDA M' mit Endzuständen:

- Endzustand hinzufügen zum Akzeptieren
- Zusätzliches Kellersymbol, damit der PDA nach Abarbeitung noch in den Endzustand wechseln kann
- Zusätzlicher Startzustand, um das neue Kellersymbol in den Keller zu legen

Akzeptieren bei leerem Keller \rightarrow Akzeptieren durch Endzustände (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$, \{z_E\})$, mit

Akzeptieren bei leerem Keller \rightarrow Akzeptieren durch Endzustände (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$, \{z_E\})$, mit

- 1 $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\}$ und $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
 $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.

$\$$ wird in den Keller gelegt. und in den alten Startzustand gewechselt.

Akzeptieren bei leerem Keller \rightarrow Akzeptieren durch Endzustände (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$, \{z_E\})$, mit

- 1 $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\}$ und $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
 $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.

$\$$ wird in den Keller gelegt. und in den alten Startzustand gewechselt.

- 2 $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z, a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$

$\$$ Übergänge von M auch in M' möglich

Akzeptieren bei leerem Keller \rightarrow Akzeptieren durch Endzustände (2)

Sei $M' = (Z \cup \{z'_0, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \delta', z'_0, \$, \{z_E\})$, mit

- 1 $\delta'(z'_0, \varepsilon, \$) = \{(z_0, \#\$\})$ und $\delta'(z'_0, a, X) = \emptyset$ für alle $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
 $X \in \Gamma \cup \{\$\}$ sonst.

$\$$ wird in den Keller gelegt. und in den alten Startzustand gewechselt.

- 2 $\delta(z, a, A) \subseteq \delta'(z, a, A)$ für alle $z \in Z, a \in \{\Sigma \cup \varepsilon\}$ und $A \in \Gamma$

$\$$ Übergänge von M auch in M' möglich

- 3 $(z_E, \varepsilon) \in \delta'(z, \varepsilon, \$)$ für alle $z \in Z$

Wechsel in den akzeptierenden Zustand und entfernen von $\$$.
 M hat in diesem Fall schon akzeptiert.

Die beiden Beweise zeigen:

Satz

PDA's mit Endzuständen und PDA's ohne Endzustände (mit Akzeptanz durch leeren Keller) sind äquivalente Formalismen.

Beachte: Bei DPDA's gilt dieses Resultat nicht (s. Übung)

Aufgabe

Geben Sie eine Turingmaschine an, die ihrer Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ um eine Position nach links auf dem Band verschiebt.

Aufgabe

Geben Sie eine Turingmaschine an, die ihrer Eingabe $w \in \{0, 1\}^*$ um eine Position nach links auf dem Band verschiebt.

Sei $M = (\{z_0, z_{w0}, z_{w1}, z_e, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$ mit

δ	z_0	z_1	z_{w0}	z_{w1}	z_e
0	$(z_0, 0, R)$	(z_{w0}, \square, L)	$(z_{w0}, 0, L)$	$(z_{w0}, 1, L)$	$(z_e, 0, N)$
1	$(z_0, 1, R)$	(z_{w1}, \square, L)	$(z_{w1}, 0, L)$	$(z_{w1}, 1, L)$	$(z_e, 1, N)$
\square	(z_1, \square, L)	(z_1, \square, N)	$(z_e, 0, L)$	$(z_e, 1, L)$	(z_e, \square, N)

- z_0 : Suche rechtes Ende und wechsele in z_1
 - z_1 : Merke letztes Zeichen im Zustand ($z_{wi}, i \in \{0, 1\}$) & ersetze durch \square .
 - z_{wi} : Für $i, j \in \{0, 1\}$: Ersetze aktuelles Zeichen j durch i , gehe nach links und wechsele in z_{wj} .
- Wenn aktuelles Zeichen \square : Dann ersetze \square durch i und akzeptiere in z_e

- z_e : Akzeptiere

Beachte: Das Verschieben der Eingabe um eine Position nach links, ist eher sinnlos (da Band unendlich groß)