

**Zentralübung 06.06.2019:
Pumping-Lemma für CFLs, Ogden's
Lemma, CYK-Algorithmus**

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



Lemma (Pumping-Lemma für CFLs)

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat (d. h. $|z| \geq n$), als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|vx| \geq 1$
- $|vwx| \leq n$
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$.

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

2) L erfüllt die Pumping-Eigenschaft:

- Wir wählen $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2$. Dann ist $z = a_1 \cdots a_k a_k \cdots a_1$ mit $k \geq 1$.
- Zerlege $z = uvwxy$ mit
 $u = a_1 \cdots a_{k-1}$, $v = a_k$, $w = \varepsilon$, $x = a_k$, $y = a_{k-1} \cdots a_1$
- $|vwx| = 2 \geq n$ und $|vx| = 2 \geq 1$
- Dann gilt $uv^iwx^iy = a_1 \cdots a_{k-1} a_k^i a_k^i a_{k-1} \cdots a_1 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

2) L erfüllt die Pumping-Eigenschaft:

- Wir wählen $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2$. Dann ist $z = a_1 \cdots a_k a_k \cdots a_1$ mit $k \geq 1$.
- Zerlege $z = uvwxy$ mit
 $u = a_1 \cdots a_{k-1}$, $v = a_k$, $w = \varepsilon$, $x = a_k$, $y = a_{k-1} \cdots a_1$
- $|vwx| = 2 \geq n$ und $|vx| = 2 \geq 1$
- Dann gilt $uv^iwx^iy = a_1 \cdots a_{k-1} a_k^i a_k^i a_{k-1} \cdots a_1 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

2) L erfüllt die Pumping-Eigenschaft:

- Wir wählen $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2$. Dann ist $z = a_1 \cdots a_k a_k \cdots a_1$ mit $k \geq 1$.
- Zerlege $z = uvwxy$ mit
 $u = a_1 \cdots a_{k-1}$, $v = a_k$, $w = \varepsilon$, $x = a_k$, $y = a_{k-1} \cdots a_1$
- $|vwx| = 2 \geq n$ und $|vx| = 2 \geq 1$
- Dann gilt $uv^iwx^iy = a_1 \cdots a_{k-1} a_k^i a_k^i a_{k-1} \cdots a_1 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

2) L erfüllt die Pumping-Eigenschaft:

- Wir wählen $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2$. Dann ist $z = a_1 \cdots a_k a_k \cdots a_1$ mit $k \geq 1$.
- Zerlege $z = uvwxy$ mit
$$u = a_1 \cdots a_{k-1}, \quad v = a_k, \quad w = \varepsilon, \quad x = a_k, \quad y = a_{k-1} \cdots a_1$$
- $|vwx| = 2 \geq n$ und $|vx| = 2 \geq 1$
- Dann gilt $uv^iwx^iy = a_1 \cdots a_{k-1} a_k^i a_k^i a_{k-1} \cdots a_1 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

2) L erfüllt die Pumping-Eigenschaft:

- Wir wählen $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2$. Dann ist $z = a_1 \cdots a_k a_k \cdots a_1$ mit $k \geq 1$.
- Zerlege $z = uvwxy$ mit
$$u = a_1 \cdots a_{k-1}, \quad v = a_k, \quad w = \varepsilon, \quad x = a_k, \quad y = a_{k-1} \cdots a_1$$
- $|vwx| = 2 \geq n$ und $|vx| = 2 \geq 1$
- Dann gilt $uv^iwx^iy = a_1 \cdots a_{k-1} a_k^i a_k^i a_{k-1} \cdots a_1 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Aufgabe

Sei $L = \{w\bar{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ wobei \bar{w} das Wort w rückwärts gelesen ist.

- 1 Zeige, dass L kontextfrei ist.
- 2 Zeige, dass L die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

1) Die CFG $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}, S)$ erzeugt L .

2) L erfüllt die Pumping-Eigenschaft:

- Wir wählen $n = 2$.
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2$. Dann ist $z = a_1 \cdots a_k a_k \cdots a_1$ mit $k \geq 1$.
- Zerlege $z = uvwxy$ mit
$$u = a_1 \cdots a_{k-1}, \quad v = a_k, \quad w = \varepsilon, \quad x = a_k, \quad y = a_{k-1} \cdots a_1$$
- $|vwx| = 2 \geq n$ und $|vx| = 2 \geq 1$
- Dann gilt $uv^iwx^iy = a_1 \cdots a_{k-1} a_k^i a_k^i a_{k-1} \cdots a_1 \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Kontextfreiheit Widerlegen mit Pumping-Lemma als Spiel

Sei L die formale Sprache.

- 1 Der **Gegner** wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- 2 **Wir** wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- 3 Der **Gegner** wählt die Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$
- 4 **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \geq 0$ angeben können, sodass $uv^iwx^i w \notin L$.

Wenn wir **für jede Wahl des Gegners** das Spiel gewinnen können, dann haben wir gezeigt, dass L **nicht kontextfrei** ist.

Aufgabe

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass $L = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit Pumping-Lemma:

- Sei n beliebig. (vom Gegner gewählt).
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1$ (vom Gegner zerlegt)
- Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- Fall: vx enthält ein b . Dann kann uv^0wx^0y nicht in L liegen, da das b entfernt wurde.
- Fall vx enthält kein b . Dann $uv^2wx^2y \notin L$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist).

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ die Pumping-Eigenschaft für CFLs erfüllt.

- Wähle $n = 4$, sei $z \in L$ mit $|z| \geq 4$ mit $z = a_1 \cdots a_{|z|}$.

- Fall: $z \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1$, $y = a_2 \cdots a_{|z|}$.

Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^iwx^iy = a_1^i y \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

- Fall: $z \in \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\}$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1 = a$,

$y = a_2 \cdots a_{|z|}$. Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^iwx^iy = a^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ die Pumping-Eigenschaft für CFLs erfüllt.

- Wähle $n = 4$, sei $z \in L$ mit $|z| \geq 4$ mit $z = a_1 \cdots a_{|z|}$.

- Fall: $z \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1$, $y = a_2 \cdots a_{|z|}$.

Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^i wx^i y = a_1^i y \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

- Fall: $z \in \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\}$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1 = a$,

$y = a_2 \cdots a_{|z|}$. Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^i wx^i y = a^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ die Pumping-Eigenschaft für CFLs erfüllt.

- Wähle $n = 4$, sei $z \in L$ mit $|z| \geq 4$ mit $z = a_1 \cdots a_{|z|}$.

- Fall: $z \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1$, $y = a_2 \cdots a_{|z|}$.

Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^i wx^i y = a_1^i y \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

- Fall: $z \in \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\}$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1 = a$,

$y = a_2 \cdots a_{|z|}$. Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^i wx^i y = a^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ die Pumping-Eigenschaft für CFLs erfüllt.

- Wähle $n = 4$, sei $z \in L$ mit $|z| \geq 4$ mit $z = a_1 \cdots a_{|z|}$.

- Fall: $z \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1$, $y = a_2 \cdots a_{|z|}$.

Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^iwx^iy = a_1^i y \in (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

- Fall: $z \in \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\}$

Wähle die Zerlegung $u = v = w = \varepsilon$, $x = a_1 = a$,

$y = a_2 \cdots a_{|z|}$. Dann gilt $z = uvwxy$, $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq 4$ und $uv^iwx^iy = a^i y \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aber: L ist nicht kontextfrei (wird gleich gezeigt)!

- Verallgemeinerung des Pumping-Lemmas für CFLs: Das sogenannte Ogdens Lemma
- benannt nach William Ogden

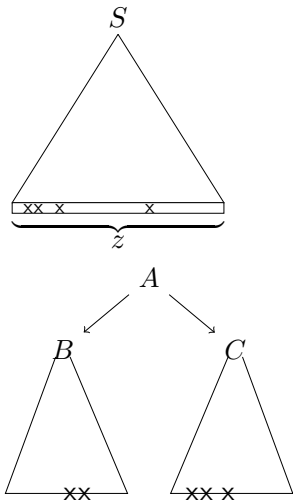
Ogdens Lemma

Sei L eine kontextfreie Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat und in dem mindestens n Zeichen markiert sind, als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann, so dass gilt:

- vx enthält mindestens ein markiertes Zeichen
- vwx enthält höchstens n markierte Zeichen
- für alle $i \geq 0$: $uv^iwx^iy \in L$.

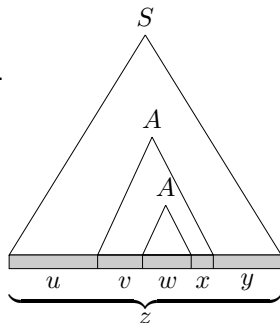
Ogdens Lemma: Beweis

- Sei L kontextfrei und $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-NF mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$
- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq 2^{|V|+1} = n$
- Seien $\geq n$ Zeichen in z markiert.
- Syntaxbaum ist bis auf letzte Schicht ($A \rightarrow a$) Binärbaum.
- Wähle Pfad im Syntaxbaum: Für Knoten mit A markiert, und Kindern B und C , wähle den Teilbaum, dessen zugehöriges Wort mehr markierte Zeichen enthält.
- Ein Knoten ist ein **Verzweigungsknoten**, wenn die zu beiden Kindern zugehörigen Worte noch markierte Zeichen enthalten



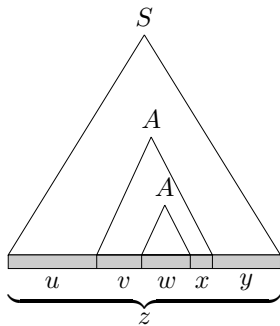
Ogdens Lemma: Beweis (2)

- Nach jedem Verzweigungsknoten ist die Menge der markierten Buchstaben höchstens halbiert
- Daher hat der gewählte Pfad $\geq |V| + 1$ Verzweigungsknoten.
- Betrachte Teilpfad von unten, der genau $|V| + 1$ Verzweigungsknoten enthält.
- Dort wird eine Variable $A \in V$ doppelt besucht.
- Das induziert Zerlegung $z = uvwxy$, wobei das obere A den Teilbaum T_{vwx} und das untere A den Teilbaum T_w erzeugt.
- T_w kann nur im linken oder im rechten Unterbaum von T_{vwx} liegen, aber beide Unterbäume enthalten noch Markierungen (da A ein Verzweigungsknoten ist)
- Daher enthält vx mindestens ein markiertes Zeichen



Ogdens Lemma: Beweis (3)

- Der Pfad vom oberen A aus enthält $|V| + 1$ Verzweigungsknoten und kann daher maximal $2^{|V|+1} = n$ Zeichen markieren.
- Daher enthält $vw x$ maximal n markierte Zeichen.
- $uv^iwx^iy \in L(G)$ da $S \Rightarrow_G^* uAv$, $A \Rightarrow_G^* vAx$ und $A \Rightarrow_G^* w$.



Pumping-Lemma ist Spezialfall von Ogden's Lemma

Satz

Das Pumping-Lemma für CFLs ist ein Spezialfall von Ogden's Lemma.

Beweis:

Markiere alle Zeichen in z (anstelle von mindestens n), dann erhält man das Pumping-Lemma für CFLs.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ nicht kontextfrei ist, durch Verwendung von Ogden's Lemma.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wählen $z = ab^n c^n d^n \in L$ und markieren das Teilwort $bc^n d$.
- Sei $z = uvwxy$, wobei vx mindestens eines und vwx höchstens n markierte Zeichen enthält.
- Teilwort vwx enthält nicht b 's, c 's und d 's
- Daher $uv^2wx^2y \notin L$ da dort die Anzahl an b 's, c 's und d 's nicht gleich sein kann, und das Wort mit a beginnt.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ nicht kontextfrei ist, durch Verwendung von Ogden's Lemma.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wählen $z = ab^n c^n d^n \in L$ und markieren das Teilwort $bc^n d$.
- Sei $z = uvwxy$, wobei vx mindestens eines und vwx höchstens n markierte Zeichen enthält.
- Teilwort vwx enthält nicht b 's, c 's und d 's
- Daher $uv^2wx^2y \notin L$ da dort die Anzahl an b 's, c 's und d 's nicht gleich sein kann, und das Wort mit a beginnt.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ nicht kontextfrei ist, durch Verwendung von Ogden's Lemma.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wählen $z = ab^n c^n d^n \in L$ und markieren das Teilwort $bc^n d$.
- Sei $z = uvwxy$, wobei vx mindestens eines und vwx höchstens n markierte Zeichen enthält.
- Teilwort vwx enthält nicht b 's, c 's und d 's
- Daher $uv^2wx^2y \notin L$ da dort die Anzahl an b 's, c 's und d 's nicht gleich sein kann, und das Wort mit a beginnt.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ nicht kontextfrei ist, durch Verwendung von Ogden's Lemma.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wählen $z = ab^n c^n d^n \in L$ und markieren das Teilwort $bc^n d$.
- Sei $z = uvwxy$, wobei vx mindestens eines und vwx höchstens n markierte Zeichen enthält.
- Teilwort vwx enthält nicht b 's, c 's und d 's
- Daher $uv^2wx^2y \notin L$ da dort die Anzahl an b 's, c 's und d 's nicht gleich sein kann, und das Wort mit a beginnt.

Aufgabe

Zeige, dass die Sprache

$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i \in \mathbb{N}_{>0}, j \in \mathbb{N}\} \cup (\{b\}^* \{c\}^* \{d\}^*)$ nicht kontextfrei ist, durch Verwendung von Ogden's Lemma.

Beweis:

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir wählen $z = ab^n c^n d^n \in L$ und markieren das Teilwort $bc^n d$.
- Sei $z = uvwxy$, wobei vx mindestens eines und vwx höchstens n markierte Zeichen enthält.
- Teilwort vwx enthält nicht b 's, c 's und d 's
- Daher $uv^2wx^2y \notin L$ da dort die Anzahl an b 's, c 's und d 's nicht gleich sein kann, und das Wort mit a beginnt.

Algorithmus 8: CYK-Algorithmus

Eingabe: CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-NF und Wort $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$

Ausgabe: Ja, wenn $w \in L(G)$ und Nein, wenn $w \notin L(G)$

Beginn

für $i = 1$ bis n **tue**

└ $V(i, 1) = \{A \in V \mid A \rightarrow a_i \in P\}$

für $j = 2$ bis n **tue**

└ **für** $i = 1$ bis $n + 1 - j$ **tue**

└└ $V(i, j) = \emptyset;$

└└ **für** $k = 1$ bis $j - 1$ **tue**

└└└ $V(i, j) = V(i, j) \cup \left\{ A \in V \mid \begin{array}{l} A \rightarrow BC \in P, \\ B \in V(i, k), \\ C \in V(i + k, j - k) \end{array} \right\}$

└└ **wenn** $S \in V(1, n)$ **dann**

└└└ return Ja

└└ **sonst**

└└└ return Nein

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| j | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A &\rightarrow a, & B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow AB \mid DD, & D &\rightarrow AB \mid ED, & E &\rightarrow AB \end{aligned}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|-------|------------|-------------|------------|-------------|------------|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | |
| 3 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | |
| 3 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | | |
| 4 | S, C, D | \emptyset | S, C, D | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | |
| 3 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | | |
| 4 | S, C, D | \emptyset | S, C, D | | | |
| 5 | \emptyset | \emptyset | | | | |
| 6 | | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | |
| 3 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | | |
| 4 | S, C, D | \emptyset | S, C, D | | | |
| 5 | \emptyset | \emptyset | | | | |
| 6 | D, S, C | | | | | |

Aufgabe

Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ wobei P :

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow SE \mid AB \mid CE, & A \rightarrow a, & B \rightarrow b \\ C \rightarrow AB \mid DD, & D \rightarrow AB \mid ED, & E \rightarrow AB \end{array}$$

Verwende den CYK-Algorithmus, um zu entscheiden, ob $ababab \in L$ gilt

| | a | b | a | b | a | b |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|---|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| j | | | | | | |
| 1 | A | B | A | B | A | B |
| 2 | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | \emptyset | S, E, C, D | |
| 3 | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset | | |
| 4 | S, C, D | \emptyset | S, C, D | | | |
| 5 | \emptyset | \emptyset | | | | |
| 6 | D, S, C | | | | | |

Da $S \in V(1, 6)$ ist $ababab \in L$