

## Zentralübung 09.05.2019: DFAs & NFAs

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik



# Endliche Automaten

	DFA	NFA
Zustandsmenge	$Z$	$Z$
Alphabet	$\Sigma$	$\Sigma$
Zustandsübergang	$\delta :: (Z \times \Sigma) \rightarrow Z$	$\delta : (Z \times \Sigma) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$
Startzust.	$z_0 \in Z$	$S \subseteq Z$
Endzustände	$E \subseteq Z$	$E \subseteq Z$
Übergang f. Worte $w \in L(M)$	$\hat{\delta} : (Z \times \Sigma^*) \rightarrow Z$ $\hat{\delta}(z_0, w) \in E$	$\hat{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ $\hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset$

## Aufgabe

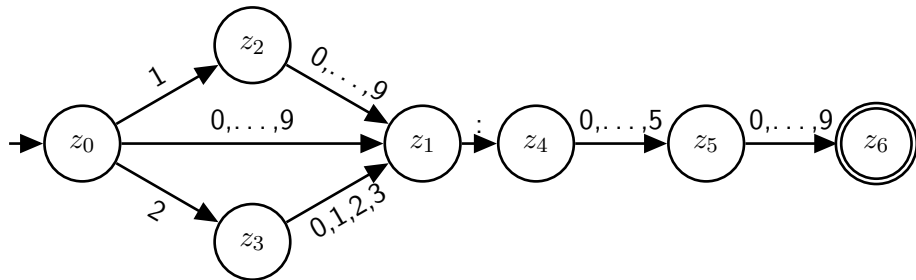
Geben Sie einen NFA an, der genau alle gültigen Uhrzeiten im 24-Stunden-Format der Form **Stunde:Minute** mit  $\text{Stunde} \in \{0, \dots, 23\}$  und  $\text{Minute} \in \{00, 01, \dots, 59\}$  (zweistellig) erkennt.

# Uhrzeiten erkennen

## Aufgabe

Geben Sie einen NFA an, der genau alle gültigen Uhrzeiten im 24-Stunden-Format der Form **Stunde:Minute** mit  $\text{Stunde} \in \{0, \dots, 23\}$  und  $\text{Minute} \in \{00, 01, \dots, 59\}$  (zweistellig) erkennt.

Beachte:  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, :\}$



# Uhrzeiten erkennen

---

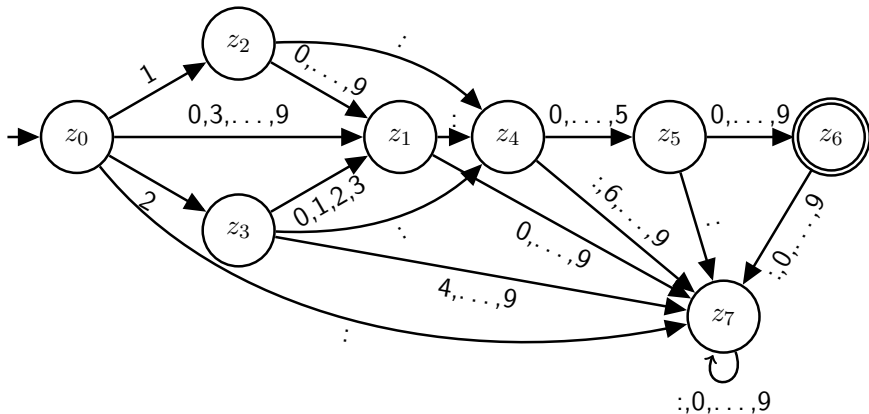
## Aufgabe

Geben Sie einen **DFA** an, der genau alle gültigen Uhrzeiten im 24-Stunden-Format der Form **Stunde:Minute** mit  $\text{Stunde} \in \{0, \dots, 23\}$  und  $\text{Minute} \in \{00, 01, \dots, 59\}$  (zweistellig) erkennt.

# Uhrzeiten erkennen

## Aufgabe

Geben Sie einen **DFA** an, der genau alle gültigen Uhrzeiten im 24-Stunden-Format der Form **Stunde:Minute** mit  $\text{Stunde} \in \{0, \dots, 23\}$  und  $\text{Minute} \in \{00, 01, \dots, 59\}$  (zweistellig) erkennt.



## Aufgabe (vgl. Hopcroft, Motwani, Ullman)

Geben Sie einen NFA an, der Ziffernfolgen aus  $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$  verarbeitet und Worte genau dann akzeptiert, wenn

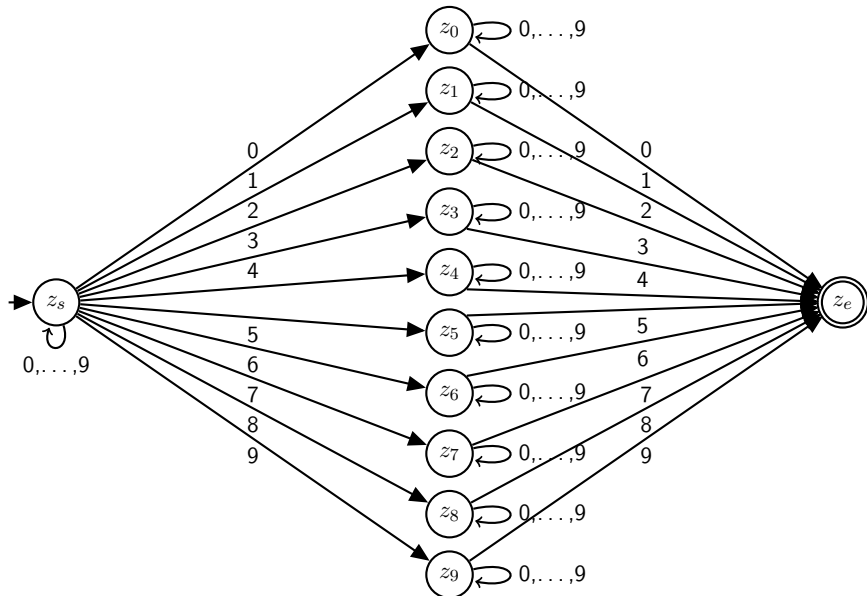
- a) die letzte Ziffer vorher schon mindestens einmal in der Folge vorkam
- b) die letzte Ziffer vorher nicht schon einmal vorkam

Nutzen Sie den Nichtdeterminismus möglichst gut aus.

a) die letzte Ziffer vorher schon mindestens einmal in der Folge vorkam

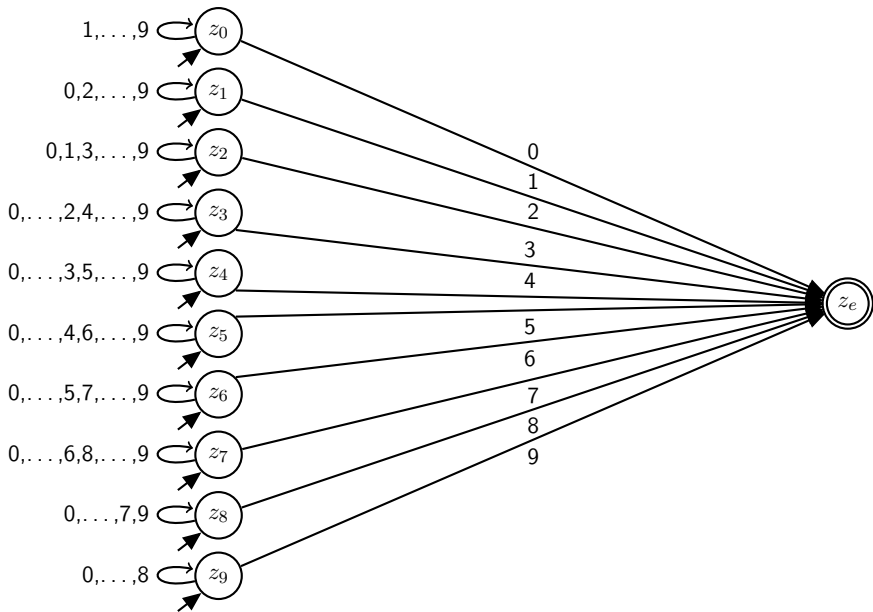


a) die letzte Ziffer vorher schon mindestens einmal in der Folge vorkam



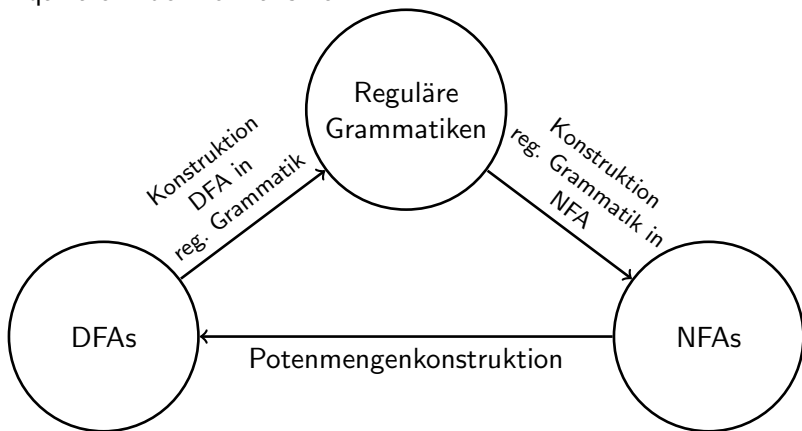
b) die letzte Ziffer vorher nicht schon einmal vorkam

b) die letzte Ziffer vorher nicht schon einmal vorkam



# Reguläre Sprachen und Endliche Automaten

Äquivalenz der Formalismen:



# Nochmal: Beweisstruktur

---

Seien

- $\mathcal{D}$  = Menge der durch DFAs akzeptierten Sprachen
- $\mathcal{N}$  = Menge der durch NFAs akzeptierten Sprachen
- $\mathcal{R}$  = Menge der regulären Sprachen

Wir haben gezeigt

- $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}$
- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}$
- $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}$

Daraus folgt:  $\mathcal{D} = \mathcal{R} = \mathcal{N}$

# Ein Spiel

---

Spielfeld:

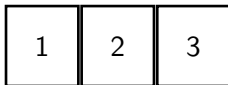


Aktionen:

- $l$  und  $r$ : Wechseln um ein Feld nach *links* bzw. *rechts*.
- $l$  bei Feld 1 und  $r$  bei Feld 3 bleiben wirkungslos.

# Ein Spiel

Spielfeld:



Aktionen:

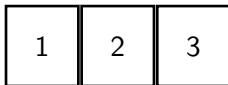
- $l$  und  $r$ : Wechseln um ein Feld nach *links* bzw. *rechts*.
- $l$  bei Feld 1 und  $r$  bei Feld 3 bleiben wirkungslos.

## Aufgabe

Geben Sie einen DFA über dem Alphabet  $\Sigma = \{l, r\}$  an, der alle Folgen von Spielzügen akzeptiert, sodass der Spieler auf Feld 1 beginnt und auf Feld 3 das Spiel beendet.

# Ein Spiel

Spielfeld:

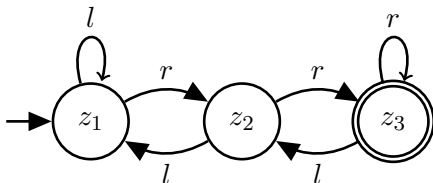


Aktionen:

- $l$  und  $r$ : Wechseln um ein Feld nach *links* bzw. *rechts*.
- $l$  bei Feld 1 und  $r$  bei Feld 3 bleiben wirkungslos.

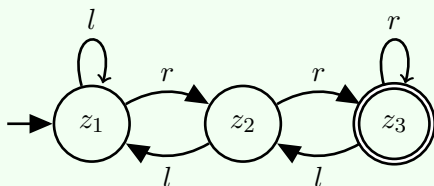
## Aufgabe

Geben Sie einen DFA über dem Alphabet  $\Sigma = \{l, r\}$  an, der alle Folgen von Spielzügen akzeptiert, sodass der Spieler auf Feld 1 beginnt und auf Feld 3 das Spiel beendet.



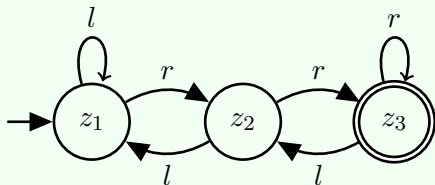


## Aufgabe



Geben Sie zum gezeigten DFA eine reguläre Grammatik an, welche die vom DFA akzeptierte Sprache erzeugt.

## Aufgabe



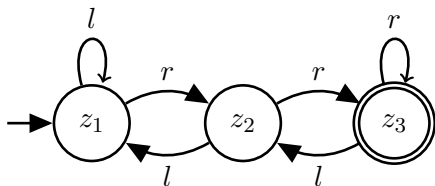
Geben Sie zum gezeigten DFA eine reguläre Grammatik an, welche die vom DFA akzeptierte Sprache erzeugt.

## Erinnerung: DFA $\rightarrow$ reguläre Grammatik

Für DFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  konstruiere  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$\begin{aligned} V &= Z, \quad S = z_0, \quad P = \{z_i \rightarrow az_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ &\quad \cup \{z_i \rightarrow a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ &\quad \cup \{z_0 \rightarrow \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

## DFA $\rightarrow$ reguläre Grammatik (2)



Reguläre Grammatik dazu:

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, P, S) \text{ mit} \\ V &= \{z_1, z_2, z_3\} \\ P &= \{z_1 \rightarrow lz_1, z_1 \rightarrow rz_2, \\ &\quad z_2 \rightarrow lz_1, z_2 \rightarrow rz_3, \\ &\quad z_3 \rightarrow lz_2, z_3 \rightarrow rz_3, \\ &\quad z_2 \rightarrow r, z_3 \rightarrow r\} \\ S &= z_1 \end{aligned}$$

## Aufgabe

$G = (\{S, A, D, E\}, \{l, r\}, P, A)$  beschreibt Spielzugfolgen, mit  
 $P = \{S \rightarrow lA \mid rS, A \rightarrow lD \mid lE \mid l \mid rS, D \rightarrow l \mid lD \mid rA \mid lE, E \rightarrow l \mid lD\}$ .  
Konstruieren Sie einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L(G)$ .

## Aufgabe

$G = (\{S, A, D, E\}, \{l, r\}, P, A)$  beschreibt Spielzugfolgen, mit  
 $P = \{S \rightarrow lA \mid rS, A \rightarrow lD \mid lE \mid l \mid rS, D \rightarrow l \mid lD \mid rA \mid lE, E \rightarrow l \mid lD\}$ .  
Konstruieren Sie einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L(G)$ .

## Zur Erinnerung: Transformation reg. Grammatik in NFA

Für  $(V, \Sigma, P, S)$  erzeuge  $(Z, \Sigma, \delta, S', E)$  mit

$$\begin{aligned}Z &= V \cup \{z_E\} \\S' &= \{S\} \\E &= \{z_E\} \cup \{S \mid \text{falls } S \rightarrow \varepsilon \in P\} \\ \delta(A, a) &= \{N \mid A \rightarrow aN \in P\} \cup \{z_E \mid A \rightarrow a \in P\} \\ \delta(z_E, a) &= \emptyset\end{aligned}$$

## Reguläre Grammatik $\rightarrow$ NFA (2)

### Aufgabe

$G = (\{S, A, D, E\}, \{l, r\}, P, A)$  beschreibt Spielzugfolgen, mit  
 $P = \{S \rightarrow lA \mid rS, A \rightarrow lD \mid lE \mid l \mid rS, D \rightarrow l \mid lD \mid rA \mid lE, E \rightarrow l \mid lD\}$ .  
Konstruieren Sie einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L(G)$ .

Konstruktion des NFA:  $M = (\{S, A, D, E, z_E\}, \{l, r\}, \delta, \{S\}, \{z_E\})$  mit

$$\delta(S, l) = \{A\}$$

$$\delta(S, r) = \{S\}$$

$$\delta(A, l) = \{D, E, z_E\}$$

$$\delta(A, r) = \{S\}$$

$$\delta(D, l) = \{D, E, z_E\}$$

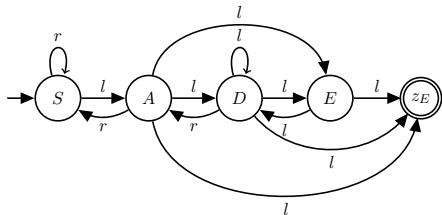
$$\delta(D, r) = \{A\}$$

$$\delta(E, l) = \{D, z_E\}$$

$$\delta(E, r) = \emptyset$$

$$\delta(z_E, l) = \emptyset$$

$$\delta(z_E, r) = \emptyset$$



# Reguläre Grammatik $\rightarrow$ NFA (2)

## Aufgabe

$G = (\{S, A, D, E\}, \{l, r\}, P, A)$  beschreibt Spielzugfolgen, mit  
 $P = \{S \rightarrow lA \mid rS, A \rightarrow lD \mid lE \mid l \mid rS, D \rightarrow l \mid lD \mid rA \mid lE, E \rightarrow l \mid lD\}$ .  
Konstruieren Sie einen NFA  $M$  mit  $L(M) = L(G)$ .

Konstruktion des NFA:  $M = (\{S, A, D, E, z_E\}, \{l, r\}, \delta, \{S\}, \{z_E\})$  mit

$$\delta(S, l) = \{A\}$$

$$\delta(S, r) = \{S\}$$

$$\delta(A, l) = \{D, E, z_E\}$$

$$\delta(A, r) = \{S\}$$

$$\delta(D, l) = \{D, E, z_E\}$$

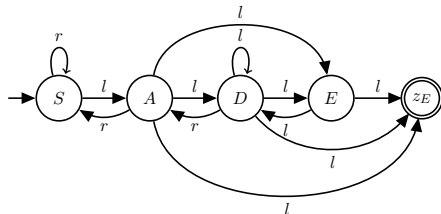
$$\delta(D, r) = \{A\}$$

$$\delta(E, l) = \{D, z_E\}$$

$$\delta(E, r) = \emptyset$$

$$\delta(z_E, l) = \emptyset$$

$$\delta(z_E, r) = \emptyset$$



Alle Folgen um von Feld 3  
zu Feld 1 zu kommen

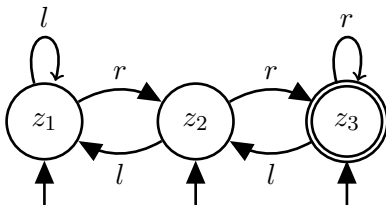
## Aufgabe

Geben Sie **einen NFA** über dem Alphabet  $\Sigma = \{l, r\}$  an, der alle Folgen von Spielzügen akzeptiert, sodass der Spieler auf **irgendeinem** Feld beginnt und auf Feld **3** das Spiel beendet.



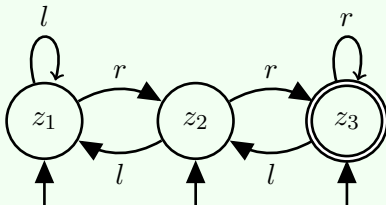
## Aufgabe

Geben Sie **einen NFA** über dem Alphabet  $\Sigma = \{l, r\}$  an, der alle Folgen von Spielzügen akzeptiert, sodass der Spieler auf **irgendeinem** Feld beginnt und auf Feld **3** das Spiel beendet.



## Aufgabe

Überführen Sie den NFA



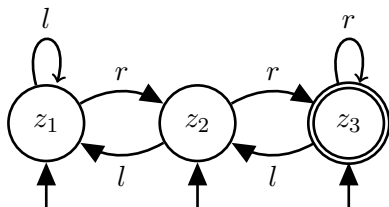
in einen DFA durch Verwendung der Potenzmengenkonstruktion.

## Potenzmengenkonstruktion

Für NFA  $(Z, \Sigma, \delta, S, E)$  konstruiere DFA  $(\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', S, E')$  mit  $E' = \{X \in \mathcal{P}(Z) \mid E \cap X \neq \emptyset\}$  und  $\delta'(X, a) = \bigcup_{z \in X} \delta(z, a)$

## NFA $\rightarrow$ DFA (2)

NFA:



DFA:

