Zentralübung 27.06.2019: LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 27. Juni 2019

LOOP-Programme / LOOP-Berechenbarkeit

Wiederholung:

LOOP-Programme

Syntax (informell)

- $x_i := x_j \pm c$
- $P_1; P_2$
- **LOOP** x_i **DO** P **END**

LOOP-Berechenbarkeit

Totale Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist LOOP-berechenbar, wenn es ein LOOP-Programm gibt, dass ausgeführt mit Variablenbelegung $\rho = \{x_1 \mapsto n_1, \ldots, x_k \mapsto n_k\}$ mit einer Variablenbelegung ρ' endet, sodass $\rho'(x_0) = f(n_1, \ldots, n_k)$

LOOP-Programme erstellen

Aufgabe

Zeige, dass die folgenden Funktionen LOOP-berechenbar sind. Gebe dabei das bezeugende LOOP-Programm vollständig und ohne Abkürzungen an.

a) $+(n_1, n_2) = n_1 + n_2$

b) $-(n_1, n_2) = \max\{0, n_1 - n_2\}$

c) $*(n_1, n_2) = n_1 * n_2$

d) $\hat{}(n_1, n_2) = n_1^{n_2}$

e) $=(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n_1 = n_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

LOOP-Programme erstellen

a) $+(n_1, n_2) = n_1 + n_2$

Beachte: LOOP-Programm empfängt n_1 über x_1, n_2 über x_2 und muss $n_1 + n_2$ in x_0 zur Verfügung stellen.

Idee: *Addiere x_2 mal 1 zum Wert von x_1.*

LOOP-Programm:

$x_0 := x_1 + 0;$
LOOP x_2 **DO**
  $x_0 := x_0 + 1$
END

Dieses Programm berechnet $+$, da

$$
\begin{array}{ll}
& (\{x_1 \mapsto n_1, x_2 \mapsto n_2\}, \quad x_0 := x_1 + 0; \textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO } x_0 := x_0 + 1 \textbf{ END}) \\
\xrightarrow[\text{LOOP}]{} & (\{x_1 \mapsto n_1, x_2 \mapsto n_2, x_0 \mapsto n_1\}, \textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO } x_0 := x_0 + 1 \textbf{ END}) \\
\xrightarrow[\text{LOOP}]{} & (\{x_1 \mapsto n_1, x_2 \mapsto n_2, x_0 \mapsto n_1\}, \underbrace{x_0 := x_0 + 1; \ldots; x_0 := x_0 + 1}_{n_2\text{-mal}}) \\
\xrightarrow[\text{LOOP}]{}^{n_2} & (\{x_0 \mapsto n_1 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n_2\text{-mal}}\}, \quad \varepsilon) = (\{x_0 \mapsto n_1 + n_2\}, \varepsilon)
\end{array}
$$

LOOP-Programme erstellen

b) $-(n_1, n_2) = \max\{0, n_1 - n_2\}$

Idee: *Subtrahiere x_2 mal 1 vom Wert von x_1.*

LOOP-Programm:

$x_0 := x_1 + 0;$
LOOP x_2 **DO**
  $x_0 := x_0 - 1$//liefert 0 wenn x_0 schon 0
END

LOOP-Programme erstellen

c) $*(n_1, n_2) = n_1 * n_2$

Idee: *Addiere x_2 mal x_1 zur 0.*

LOOP-Programm (optimiert):

LOOP x_2 **DO** // x_2-mal x_1 addieren
  LOOP x_1 **DO**// x_1-mal 1 addieren
    $x_0 := x_0 + 1$
  END
END

LOOP-Programme erstellen

d) $\hat{}(n_1, n_2) = n_1^{n_2}$

Idee: *Multipliziere x_2 mal x_1 zur 1, d.h.* $1 \cdot \underbrace{x_1 \cdots x_1}_{x_2\text{-mal}}$

LOOP-Programme erstellen

e) $=(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n_1 = n_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Idee: *Berechne $-(n_1, n_2)$ und $-(n_2, n_1)$ und prüfe, dass beides mal 0 raus kommt.*

LOOP-Programm:

$x_0 := x_0 + 1;$
$x_3 := x_1 + 0;$
$x_4 := x_2 + 0;$
LOOP x_2 **DO** $x_3 := x_3 - 1$ **END**;
LOOP x_1 **DO** $x_4 := x_4 - 1$ **END**;
LOOP x_3 **DO** $x_0 := x_5 + 0$ **END**;
LOOP x_4 **DO** $x_0 := x_5 + 0$ **END**

LOOP-Programme

Aufgabe

Zeige, dass die Funktion $prime(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ Primzahl} \\ 0, & \text{wenn } x \text{ keine Primzahl} \end{cases}$ LOOP-berechenbar ist. Sie dürfen die Abkürzungen

- $x_i := c$ für das Programm, das x_i den Konstantenwert c zuweist
- $x_i := x_j * x_k$ für das Programm, das x_i das Produkt der Werte von x_j und x_k zuweist
- $x_i := x_j == x_k$ für das Programm,das x_i den Wert 0 oder 1 zuweist, jenachdem ob die Werte von x_j und x_k verschieden oder gleich sind.

verwenden.

Ideen zum Programm für $prime$

- Für $x_1 > 2$, teste, ob es x_3, x_4 gibt mit $x_3 * x_4 = x_1$ und $x_3, x_4 > 1$
- Fälle $x_1 \leq 2$ werden extra behandelt
- Obere Grenze für x_3, x_4 ist eigentlich $\lceil \sqrt{x_1} \rceil$
- Wir nehmen zuviel: x_1, funktioniert immer noch

Programm, dass $prime(x_1)$ berechnet

LOOP-Programm:

$x_0 := 0;$
$x_2 := x_1 - 1;$
LOOP x_2 **DO** $x_0 := 1$ **END**; // setzt x_0 auf 1, wenn $x_1 > 1$
$x_3 := 2;$
LOOP x_1 **DO**
  $x_4 := 2;$
  LOOP x_1 **DO**
    $x_5 := x_3 * x_4;$
    $x_6 := x_1 == x_5;$
    LOOP x_6 **DO** $x_0 := 0$ **END**; // Produkt gefunden
    $x_4 := x_4 + 1$
  END;
  $x_3 := x_3 + 1$
END

WHILE-Programme / GOTO-Programme

Wiederholung:

WHILE-Programme, Syntax informell

- $x_i := x_j \pm c$
- $P_1; P_2$
- **LOOP** x_i **DO** P **END**
- **WHILE** $x_i \neq 0$ **DO** P **END**

GOTO-Programme, Syntax informell

Programm $M_1 : A_1; \ldots; M_n : A_n$ mit A_i

- $x_i := x_j \pm c$
- **GOTO** M_j
- **IF** $x_i = 0$ **THEN GOTO** M_j
- **HALT**

Einfache Programme

Aufgabe

Zeigen, dass die folgenden Funktionen WHILE- und GOTO-berechenbar sind, indem Sie sowohl ein WHILE- als auch ein GOTO-Programm angeben, welche die Berechenbarkeit bezeugen.

a) $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$

b) $f(n_1, n_2) = n_1 * n_2$

c) $f(n_1, n_2) = \begin{cases} n_1 - n_2, & \text{wenn } n_1 \geq n_2 \\ \text{undefiniert, sonst} \end{cases}$

Einfache Programme

a) $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$

WHILE-Programm:

$x_0 := x_1 + 0;$
$x_3 := x_2 + 0;$
WHILE $x_3 \neq 0$ **DO**
    $x_0 := x_0 + 1;$
    $x_3 := x_3 - 1$
END

GOTO-Programm:

$M_1 : x_0 := x_1 + 0;$
$M_2 : x_3 := x_2 + 0;$
$M_3 :$ **IF** $x_3 = 0$ **THEN GOTO** $M_7;$
$M_4 : x_0 := x_0 + 1;$
$M_5 : x_3 := x_3 - 1;$
$M_6 :$ **GOTO** $M_3;$
$M_7 :$ **HALT**

Einfache Programme

b) $f(n_1, n_2) = n_1 * n_2$

WHILE-Programm:

$x_0 := x_0 + 0;$
$x_3 := x_2 + 0;$
WHILE $x_3 \neq 0$ **DO**
    $x_4 := x_1 + 0:$
    WHILE $x_4 \neq 0$ **DO**
        $x_0 := x_0 + 1;$
        $x_4 := x_4 - 1;$
    END
    $x_3 := x_3 - 1;$
END

GOTO-Programm:

$M_1 : x_0 := x_0 + 0;$
$M_2 : x_3 := x_2 + 0;$
// Aeussere Berechnung fuer *
$M_3 :$ **IF** $x_3 = 0$ **THEN GOTO** $M_{11};$
$M_4 :$ **GOTO** $M_7;$
$M_5 : x_3 := x_3 - 1;$
$M_6 :$ **GOTO** $M_3;$
// Innere Berechnung fuer +
$M_7 : x_4 := x_1;$
$M_8 :$ **IF** $x_4 = 0$ **THEN GOTO** $M_5;$
$M_9 : x_0 := x_0 + 1;$
$M_{10} : x_4 := x_4 - 1;$
$M_{11} :$ **GOTO** $M_8;$
$M_{12} :$ **HALT**

Einfache Programme

c) $f(n_1, n_2) = \begin{cases} n_1 - n_2, & \text{wenn } n_1 \geq n_2 \\ \text{undefiniert, sonst} \end{cases}$

WHILE-Programm:

$x_0 := x_1 + 0;$
$x_3 := x_2 + 0;$
WHILE $x_3 \neq 0$ **DO**
    $x_4 := x_5 + 1;$ $// x_4 := 1$
    LOOP x_0 **DO** $x_4 := x_5 + 0$ **END**; //**IF** $x_0 \neq 0$ **THEN** $x_4 := 0$
    WHILE $x_4 \neq 0$ **DO** $x_4 := x_4 + 0$ **END**;
    $x_0 := x_0 - 1;$
    $x_3 := x_3 - 1$

Einfache Programme

c) $f(n_1, n_2) = \begin{cases} n_1 - n_2, & \text{wenn } n_1 \geq n_2 \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$

GOTO-Programm:

$M_1 : x_0 := x_1 + 0;$
$M_2 : x_3 := x_2 + 0;$
$M_3 :$ **IF** $x_3 = 0$ **THEN GOTO** $M_8;$
$M_4 :$ **IF** $x_0 = 0$ **THEN GOTO** $M_9;$
$M_5 : x_0 := x_0 - 1;$
$M_6 : x_3 := x_3 - 1;$
$M_7 :$ **GOTO** $M_3;$
$M_8 :$ **HALT**;
$M_9 :$ **GOTO** M_9