LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2019

Komplexitätstheorie Teil II: Eine Auswahl $\mathcal{NP}$-vollständiger Probleme

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 21. Juli 2019

Inhalt

- Auswahl an $\mathcal{NP}$-vollständigen Problemen
- $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise durch polynomielle Reduktionen und zeigen, dass das Problem in $\mathcal{NP}$ ist

3-CNF-SAT

Konjunktive Normalform
Aussagenlog. Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF), wenn:

$$F = \bigwedge_{i=1}^{m} (\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$$

- Literal $L_{i,j}$ ist aussagenlogische Variable oder deren Negation
- $(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$ ist eine Klausel
- Erfüllende Belegung muss ≥ 1 Literal pro Klausel wahr machen.

Klauselmengenschreibweise: $\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}\}\}$

Annahme: Keine Klauseln, die x und $\neg x$ enthalten
Diese Klauseln sind immer wahr und können gelöscht werden.

Konjunktive Normalform

Jede aussagenlogische Formel kann in eine **äquivalente** konjunktive Normalform gebracht werden:

- $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ auflösen
- Negationen nach innen schieben und anschließend Ausmultiplizieren (Distributivität, Kommutativität anwenden, um konjunktive Normalform herzustellen)

Aber:

- Algorithmus hat im worst case exponentielle Laufzeit
- Algorithmus kann daher **nicht** für eine Polynomialzeitreduktion verwendet werden.

3-CNF-SAT

Definition (3-CNF-SAT)

Das 3-CNF-SAT-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren als:

gegeben: Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform, sodass jede Klausel höchstens 3 Literale enthält.

gefragt: Ist F erfüllbar? Genauer: Gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen mit den Wahrheitswerten 0 und 1, sodass F den Wert 1 erhält?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis, Teil 1: 3-CNF-SAT ist in $\mathcal{NP}$

- Rate nicht-deterministisch eine Belegung der Variablen
- Prüfe deterministisch, ob die Belegung die 3-CNF wahr macht. Akzeptiere in diesem Fall. Dies geht in Polynomialzeit in der Größe der 3-CNF.
- Daher kann 3-CNF-SAT auf einer NTM in Polynomialzeit entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (2)

Beweis, Teil 2: 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-hart

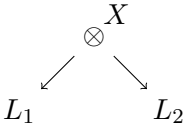
- Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.
- Gesucht: Polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass F erfüllbar g.d.w. 3-CNF $f(F)$ erfüllbar.
- f muss die Erfüllbarkeit erhalten, aber nicht die Äquivalenz
- Verfahren, um F in erfüllbarkeitsäquivalente 3-CNF $f(F)$ umzuformen, sodass $f(F)$ polynomielle Größe in $|F|$ hat:

Tseitin-Transformation

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation:

- Schiebe alle Negationen nach innen vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \to F$, $\neg(F \wedge G) \to \neg F \vee \neg G$, $\neg(F \vee G) \to \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \iff G) \to (\neg F) \iff G$ und $\neg(F \implies G) \to F \wedge \neg G$ angewendet.
- Syntaxbaum der Formel (Blätter = Literale): Für jeden Nichtblatt-Knoten: neue aussagenlogische Variable
- pro Gabelung: erzeuge



$(X \iff (L_1 \otimes L_2))$

wobei $\otimes \in \{\iff, \wedge, \vee, \implies\}$ und L_1, L_2 entweder die neue Variable oder das Literal am Blatt.

- Konjugiere diese Formeln zu F' und schließlich erzeuge $W \wedge F'$, mit W Variable für die Wurzel.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (3)

Tseitin-Transformation (Fortsetzung)

- Insgesamt: $W \wedge \bigwedge_{i,j,k}(X_i \iff (X_j \otimes_i X_k))$, wobei X_r Literale sind.
- Berechne für jede Subformel $(X_i \iff (X_j \otimes_i X_k))$ die CNF mit dem üblichen Algorithmus.
- Lösche doppelte Vorkommen von Literalen.
- Ergibt 3-CNF, da pro Klausel nur 3 verschiedene Variablen vorkommen können.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (4)

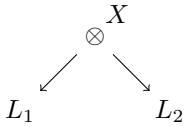
Komplexität:

- Größe der kleinen CNFs ist konstant.
- Jede Klausel hat nur 3 Literale: Mehr Variablen gibt es in den kleinen Formeln nicht, doppelte Literale löschen
- Größe der 3-CNF ist polynomiell in der ursprünglichen Formel
- Berechnung in Polynomialzeit: klar!

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT (5)

F erfüllbar g.d.w. $f(F)$ erfüllbar:

- „$\Rightarrow$“: Sei I Belegung mit $I(F) = 1$. Sei I' Belegung mit
  - $I'(X) = I(X)$ für alle Variablen, die in F vorkommen
  - $I'(W) = 1$ für die Variable W an der Wurzel
  - $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$ für



  Dann gilt: $I'(f(F)) = 1$
- „$\Leftarrow$“: Sei J Belegung von $f(F)$ mit $J(f(F)) = 1$
  Dann: $I = J_{|Var(F)}$ macht F wahr.

Damit: SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.
Da SAT $\mathcal{NP}$-hart, ist somit auch 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$-hart.

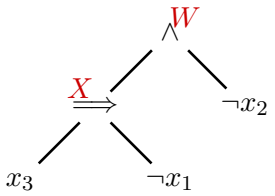
Beispiel

$$F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$$

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{array}{ll} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \rightarrow & (\neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1)) \wedge \neg x_2) \\ \rightarrow & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2) \end{array}$$

Syntaxbaum dazu:



Formel: $W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$

Beispiel (2)

Berechnung der CNFs der kleinen Subformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\to\ & W \wedge ((W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\to\ & W \wedge ((W \vee (\neg X \vee x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\to\ & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\to\ & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\
& \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\to\ & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\
& \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\
\to\ & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\
& \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \\
\to\ & W \wedge (W \vee \neg X) \wedge (W \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \\
& \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1)
\end{aligned}
$$

Erfüllende Belegung J:
$J(W) = 1,\ J(X) = 1,\ J(x_1) = 0,\ J(x_2) = 0,\ J(x_3) = 1$

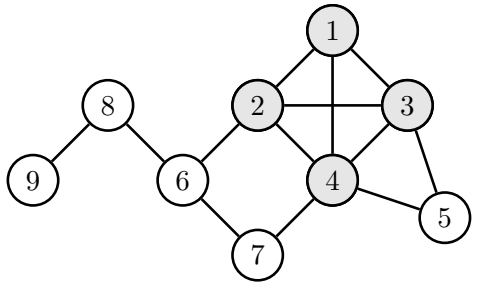
Belegung I:
$I(x_1) = 0,\ I(x_2) = 0,\ I(x_3) = 1$ erfüllt $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$

Cliquen in Graphen

Definition

Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine **Clique der Größe** k eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Beispiel:



Clique der Größe 4

CLIQUE-Problem

Definition (CLIQUE-Problem)

Das CLIQUE-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Besitzt G eine Clique der Größe mindestens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (1)

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: CLIQUE $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten
- Prüfe (deterministisch), ob für alle $u, v \in V'$: $u \neq v \implies \{u, v\} \in E$ gilt. Falls ja, akzeptiere.
- Daher kann eine NTM konstruiert werden, die CLIQUE in Polynomialzeit entscheidet.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (2)

Beweis: CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-hart:

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, wobei $K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$ für $i = 1, \ldots, m$ (falls $K_i < 3$ Literale hat, verdopple Literale)
- Für jedes $L_{i,j}$ erzeuge: Knoten (i,j) im Graphen, d.h.
$$V = \bigcup_{i=1}^{m} \{(i,1),(i,2),(i,3)\}$$
- Keine Kante innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$
- Kanten zwischen „verschiedenen Klauseln“:
$E \subseteq \{\{(i,j),(i',j')\} \mid i \neq i' \wedge i,i' \in \{1,\ldots,m\} \wedge j,j' \in \{1,2,3\}\}$
- E als maximale Menge, sodass sich niemals zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen
(d.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$ mit $\overline{L}$ negiertes Literal zu L: $\overline{x} = \neg x$ und $\overline{\neg x} = x$).

$$E := \{\{(i,j),(i',j')\} \mid i \neq i' \wedge i,i' \in \{1,\ldots,m\} \wedge j,j' \in \{1,2,3\}, L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}\}$$

- $f(F) = ((V,E),m)$ ist in Polynomialzeit berechenbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (3)

Zu Zeigen: F erfüllbar, g.d.w. (V,E) eine Clique der Größe mindestens m hat.

„$\Rightarrow$“

- Wenn F erfüllbar ist:
$\exists\, I$, sodass in jeder Klausel $I(K_i)$ mind 1 Literal wahr.
- D.h.: $L_{1,j_1}, \ldots, L_{m,j_m}$ mit $I(L_{1,j_1}) = 1, \ldots, I(L_{m,j_m}) = 1$.
- Diese können sich paarweise nicht widersprechen
$\Longrightarrow$ sind im Graphen paarweise miteinander verbunden
- Sie formen eine Clique der Größe m.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE (4)

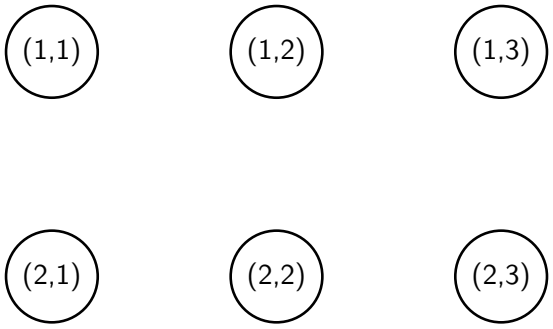
Zu Zeigen: F erfüllbar, g.d.w. (V,E) eine Clique der Größe mindestens m hat.

„$\Leftarrow$“

- (V,E) hat Clique der Größe mindestens m.
- Dann gibt es Clique $V' = \{(i_1,j_1),\ldots(i_m,j_m)\}$,
- Da (i,x) und (i,y) nie miteinander verbunden sind, müssen alle $i_1,\ldots,i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1,\ldots,i_m\} = \{1,\ldots,m\}$.
- Daher: Die Literale $L_{i_1,j_1},\ldots Li_m,j_m$ widersprechen sich paarweise nicht
- Daher Belegung I mit $I(x) = 1$ wenn $L_{i_k,j_k} = x$ und $I(x) = 0$ wenn $L_{i,k,j_k} = \neg x$ und $I(y) = 1$ für alle anderen Variablen
- I macht F wahr

Beispiel

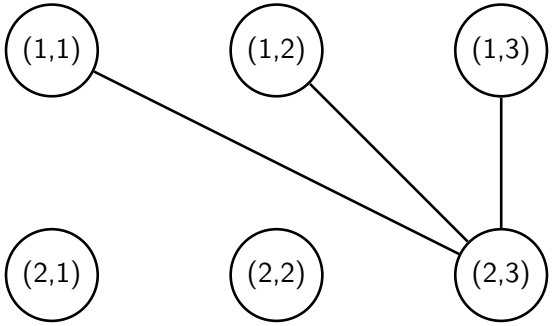
Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$



Es gibt keine Kanten, da sich $(1,i)$ und $(2,j)$ stets widersprechen.

Beispiel (2)

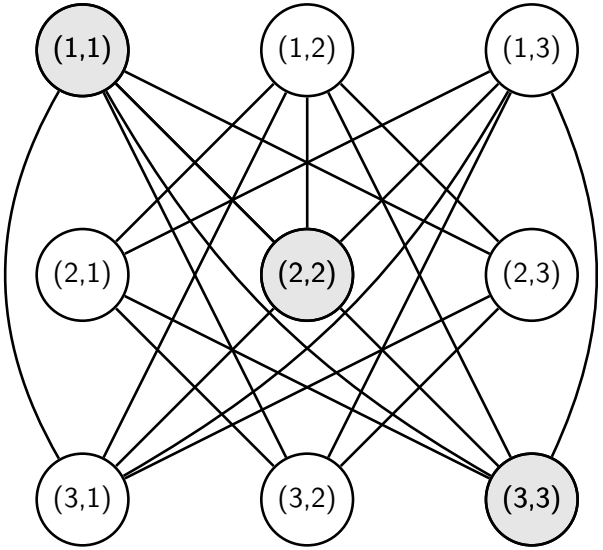
Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_1)$



Jede der Cliquen der Größe 2 führt zu erfüllender Belegung, die x_1 wahr macht.

Beispiel (2)

Sei $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

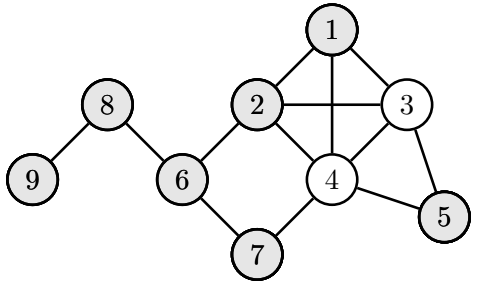


Unabhängige Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (independent set), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$.

Beispiel:



Komplementgraph

Für Graph $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G, der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$

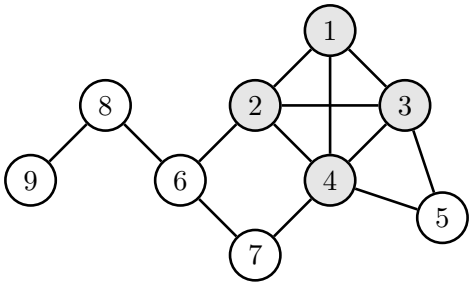
Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k genau dann, wenn $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

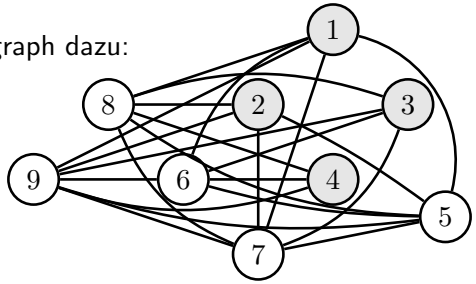
Beweis:

	V' ist unabhängige Knotenmenge der Größe k
g.d.w.	$V' \subseteq V$ mit $u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$ und $\lvert V' \rvert = k$
g.d.w.	$u, v \in V' \implies \{u, v\} \in \overline{E}$
g.d.w.	V' ist eine Clique der Größe k in $\overline{G}$

Beispiel



Komplementgraph dazu:



INDEPENDENT-SET Problem

Definition (INDEPENDENT-SET-Problem)

Das INDEPENDENT-SET-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Besitzt G eine unabhängige Knotenmenge der Größe mindestens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Satz

INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis, Teil 1: INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch Menge V' von k Knoten.
- Verifiziere deterministisch, ob für jedes Paar $\{u, v\} \in V'$ gilt: $\{u, v\} \notin E$. Dies geht in Polynomialzeit.
- Daher kann INDEPENDENT-SET in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET (2)

INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-hart.

- Sei $f((V, E, m)) = (V, \overline{E}, m)$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$.
- Dann gilt:
  (V, E) hat eine CLIQUE der Größe mindestens k g.d.w.
  $(V, \overline{E})$ hat ein INDEPENDENT-SET der Größe mindestens k.
- Funktion f kann in Polynomialzeit berechnet werden.
- Daher: CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET
- Da CLIQUE $\mathcal{NP}$-hart, folgt
  INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-hart.

Überdeckende Knotenmenge

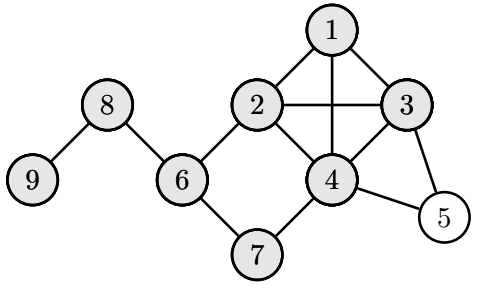
Definition

Für einen Graph $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine überdeckende Knotenmenge (vertex cover), wenn jede Kante aus E mindestens 1 Knoten in V' hat, d.h. für alle Knoten $u, v \in V$:
$\{u, v\} \in E \implies u \in V' \vee v \in V'$.

Beachte:

- V ist immer eine überdeckende Knotenmenge
- Man möchte ein möglichst kleine Menge V' finden.

Beispiel



Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

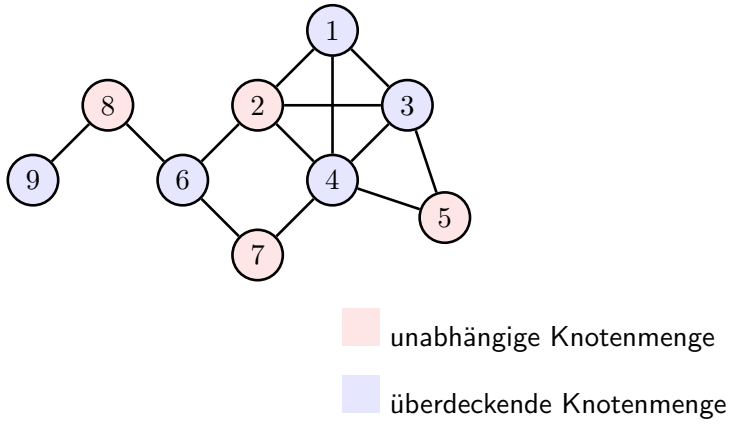
Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k, g.d.w. G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis:

	$V' \subseteq V$ ist unabhängige Knotenmenge
g.d.w.	$u, v \in V' \implies \{u, v\} \notin E$
g.d.w.	$\{u, v\} \in E \implies u \notin V' \vee v \notin V'$
g.d.w.	$\{u, v\} \in E \implies (u \in V \setminus V') \vee (v \in V \setminus V')$
g.d.w.	$V \setminus V'$ ist überdeckende Knotenmenge

Beispiel



Das VERTEX-COVER-Problem

Definition (VERTEX-COVER-Problem)

Das VERTEX-COVER-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Besitzt G eine überdeckende Knotenmenge der Größe höchstens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER- ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: Sei $G = (V, E)$. VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten
- Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle $\{u, v\} \in E$: $u \in V' \vee v \in V'$ gilt.
- D.h. VERTEX-COVER wird in Polynomialzeit von NTM entschieden.

VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-hart:

- Sei $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$. Dann gilt: (V, E) hat independent set der Größe mindestens m g.d.w. (V, E) hat vertex cover der Größe höchstens $|V| - m$.
- Da f in Polynomialzeit berechnet werden kann, gilt INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.

Das SETCOVER-Problem

Definition (SETCOVER-Problem)

Das SETCOVER-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation formulieren durch:

gegeben: Mengen $T_1, \ldots, T_k$ mit $T_1, \ldots, T_k \subseteq M$, wobei M eine endliche Grundmenge ist und eine Zahl $n \leq k$.

gefragt: Gibt es eine Auswahl von n Mengen $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$ $(i_j \in \{1, \ldots, k\})$ mit $T_{i_1} \cup \ldots \cup T_{i_n} = M$?

Beispiel:

$T_1 = \{1, 2, 3, 5\}, T_2 = \{1, 2\}, T_3 = \{3, 4\}, T_4 = \{3\}$ mit $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $n = 2$

Lösung: T_1, T_3, da $T_1 \cup T_3 = M$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SETCOVER

Satz

SETCOVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis, Teil 1: SETCOVER $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch die n Mengen $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$.
- Verifiziere deterministisch, ob $T_{i_1} \cup \cdots \cup T_{i_n} = M$ gilt.
- Daher kann SETCOVER in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SETCOVER (2)

Beweis, Teil 2: SETCOVER ist $\mathcal{NP}$-hart.

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ SETCOVER.
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF.
- Seien $x_1, \ldots, x_n$ die aussagenlogischen Variablen.
- Setze $M = \{1, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n\}$.
- Für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$\begin{aligned} T_{i,a} &= \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \\ T_{i,b} &= \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \end{aligned}$$

- Das Mengensystem sei $T_{1,a}, \ldots, T_{n,a}, T_{1,b}, \ldots, T_{n,b} \subseteq M$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SETCOVER (3)

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} T_{i,a} &= \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \\ T_{i,b} &= \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \end{aligned}$$

Sei I Belegung mit $I(F) = 1$.

- Wenn $I(x_i) = 1$, dann wähle $T_{i,a}$, sonst wähle $T_{i,b}$
- Ergibt n gewählte Mengen
- Jede Zahl aus M kommt vor:
  - Da jede Klausel durch I erfüllt, kommen alle 1,..., m vor
  - Da jede Variable x_i mit 0 oder 1 belegt wird, kommen alle $m+1, \ldots, m+n$ vor
- Vereinigung der n Mengen ergibt daher M.
- SETCOVER ist lösbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SETCOVER (4)

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} T_{i,a} &= \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \\ T_{i,b} &= \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \end{aligned}$$

Seien $U_1, \ldots, U_n \subseteq T_{1,a}, \ldots, T_{n,a}, T_{1,b}, \ldots, T_{n,b}$ mit $U_1 \cup \ldots \cup U_n = M$

- Da $m+1, \ldots, m+n$ in der Vereinigung, muss für $i = 1, \ldots, n$ genau $T_{i,a}$ oder $T_{i,b}$ in der Vereinigung sein.
- O.B.d.A. $U_i \in \{T_{i,a}, T_{i,b}\}$
- Setze $I(x_i) = 1$ wenn $U_i = T_{i,a}$ und $I(x_i) = 0$ wenn $U_i = T_{i,b}$
- Da $1, \ldots, m$ in der Vereinigung, wird in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht
- F ist erfüllbar.

Da diese Übersetzung in Polynomialzeit berechenbar ist, gilt 3-SAT-CNF $\leq_p$ SETCOVER.

Beispiel

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned} T_{1,a} &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,3,5\} \\ T_{1,b} &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{2,4,5\} \\ T_{2,a} &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,4,6\} \\ T_{2,b} &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3,6\} \end{aligned}$$

Gesucht: Vereinigung von $n = 2$ Mengen $T_{i,j}, T_{i',j'}$ mit $T_{i,j} \cup T_{i',j'} = \{1,2,3,4,5,6\}$

Keine Lösung!

Beispiel (2)

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
T_{1,a} &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,2,4\}\\
T_{1,b} &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{3,4\}\\
T_{2,a} &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,5\}\\
T_{2,b} &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3,5\}\\
T_{3,a} &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &&= \{1,3,6\}\\
T_{3,b} &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &&= \{6\}
\end{aligned}$$

Gesucht: Vereinigung von $n = 3$ Mengen $T_{i,j}, T_{i',j'}$ mit $T_{i,j} \cup T_{i',j'} = \{1,2,3,4,5,6\}$

Lösung z.B. $T_{1,a}, T_{2,b}, T_{3,b}$

Belegung dazu $I(x_1) = 1, I(x_2) = 0, I(x_3) = 0$

Das SUBSETSUM-Problem

Definition (SUBSETSUM-Problem)

Das SUBSETSUM-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$
gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Beispiel:

$a_1, \ldots, a_6 = 1, 21, 5, 16, 12, 19$ und $s = 49$

Lösung: $2, 4, 5$, da $21 + 16 + 12 = 49$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SUBSETSUM

Satz

Das SUBSETSUM-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis, Teil 1: SUBSETSUM $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$
- Prüfe (deterministisch) ob $\sum_{i \in I} a_i = s$ gilt
- Daher: SUBSETSUM in Polynomialzeit auf NTM entscheidbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SUBSETSUM (2)

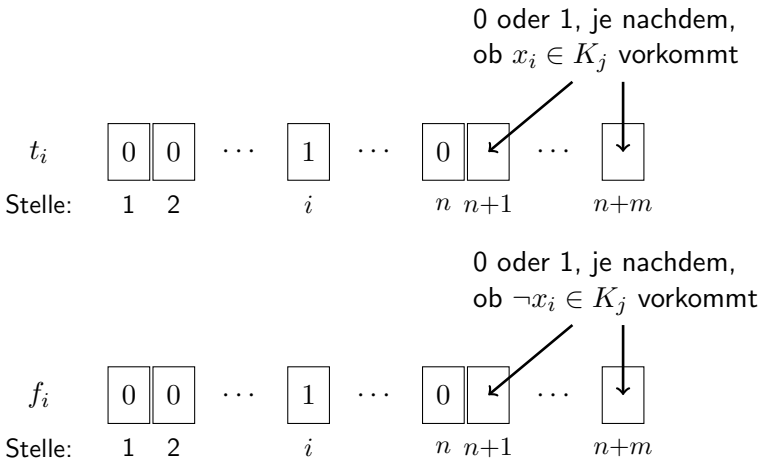
SUBSETSUM ist $\mathcal{NP}$-hart: Zeige 3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSETSUM

- Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF
- Annahme: Alle Klauseln K_j bestehen aus genau 3 Literalen (Vervielfache Literale anderenfalls)
- Seien $Var(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ die Variablen in F

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SUBSETSUM (2)

Konstruktion der SUBSETSUM-Instanz:

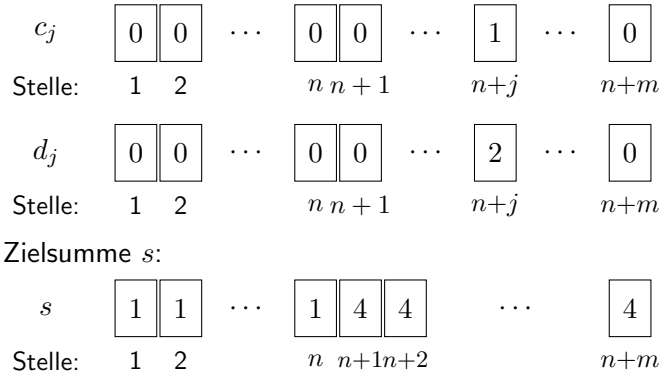
Erzeuge $n+m$-stellige Zahlen t_i, f_i für $i = 1, \ldots, n$:



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SUBSETSUM (3)

Weitere Zahlen:

Erzeuge $n+m$-stellige Zahlen c_j, d_j für $j = 1, \ldots, m$:



Zielsumme s:

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SUBSETSUM (4)

Sei also $f(F) = ((t_1, \ldots, t_n, f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_m), s)$.

Es gilt:

- Die Summe jeder Teilmenge der Zahlen erzeugt keine Überträge.
- Die n Einsen in s sorgen dafür, dass in I jeweils t_i oder f_i enthalten ist aber nicht beide.
- Die Wahl der t_i und f_i in I zählt gleichzeitig in den Stellen $n+1$ bis $n+m$, welche Klauseln durch Setzen von x_i auf 1 (bzw. x_i auf 0) wahr gemacht werden.
- In der Summe kann dies pro Stelle j eine Zahl zwischen 0 und 3 sein
- Durch Hinzunahme der c_j und/oder d_j kann die Zielsumme 4 pro Stelle j erreicht werden, wenn mindestens 1 Literal wahr ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SUBSETSUM (5)

Sei I Lösung von SUBSETSUM-Instanz $((t_1, \ldots, t_n, f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, c_m), s)$.

- Konstruiere Belegung B für F.
- Setze für $i \in I$ mit $1 \leq i \leq n$: $B(x_i) = 1$
- Setze für $i \in I$ mit $n+1 \leq i \leq n+n$: $B(x_i) = 0$.
- Macht in jeder Klausel mind. 1 Literal wahr

Sei B erfüllende Belegung für F.

- Konstruiere Indexmenge I
- I enthält den Index von t_i wenn $B(x_i) = 1$,
- I enthält den Index von f_i wenn $B(x_i) = 0$
- I enthält die Indizes der c_j, d_j, sodass sich die hinteren m Stellen zu 4 aufsummieren
  Immer möglich, da für jede Stelle die Summe schon mindestens 1 ist (da B erfüllende Belegung).

Damit folgt: 3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSETSUM.

Beispiel

$F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$
wird übersetzt in:

$$\begin{array}{lll} a_1 & = t_1 & = 110 \\ a_2 & = f_1 & = 101 \\ a_3 & = c_1 & = 010 \\ a_4 & = c_2 & = 001 \\ a_5 & = d_1 & = 020 \\ a_6 & = d_2 & = 002 \\ & s & = 144 \end{array}$$

(Unlösbar)

Beispiel (2)

$F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ wird übersetzt in

$$\begin{array}{lll} a_1 & = t_1 & = 100010100 \\ a_2 & = t_2 & = 010011010 \\ a_3 & = t_3 & = 001000001 \\ a_4 & = t_4 & = 000100101 \\ a_5 & = f_1 & = 100001010 \\ a_6 & = f_2 & = 010000101 \\ a_7 & = f_3 & = 001001010 \\ a_8 & = f_4 & = 000110000 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a_9 & = c_1 & = 000010000 \\ a_{10} & = c_2 & = 000001000 \\ a_{11} & = c_3 & = 000000100 \\ a_{12} & = c_4 & = 000000010 \\ a_{13} & = c_5 & = 000000001 \\ a_{14} & = d_1 & = 000020000 \\ a_{15} & = d_2 & = 000002000 \\ a_{16} & = d_3 & = 000000200 \\ a_{17} & = d_4 & = 000000020 \\ a_{18} & = d_5 & = 000000002 \\ s & & = 111144444 \end{array}$$

Lösung $I = \{2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18\}$.
Erfüllende Belegung $B(x_1) = 0, B(x_2) = 1, B(x_3) = 0, B(x_4) = 1$.

Das Rucksack-Problem

Definition (KNAPSACK-Problem)

Das KNAPSACK-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: k Gegenstände mit Gewichten $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{N}$ und Nutzenwerten $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, sowie zwei Zahlen $s_w, s_n \in \mathbb{N}$.

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} w_i \leq s_w$ und $\sum_{i \in I} n_i \geq s_n$?

Beachte für $w_i = n_i$ und $s_n = s_w$ ergibt sich genau das SUBSETSUM-Problem!

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Satz

KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis:

KNAPSACK $\in \mathcal{NP}$:

- Rate eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ nichtdeterministisch
- Prüfe deterministisch, ob $\sum_{i \in I} w_i \leq s_w$ und $\sum_{i \in I} n_i \geq s_n$
- Daher kann KNAPSACK in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-hart:

- Sei $((a_1, \ldots, a_k), s)$ eine SUBSETSUM-Instanz
- Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = ((w_1, \ldots, w_k), (n_1, \ldots, n_k), s_w, s_m)$ mit $w_i = a_i, n_i = a_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $s_w = s$ und $s_m = s$.
- $((a_1, \ldots, a_k), s)$ lösbar g.d.w. $f((a_1, \ldots, a_k), s)$ lösbar
- f ist in polynomieller Zeit von einer DTM berechenbar.
- SUBSETSUM $\leq_p$ KNAPSACK.

Das PARTITION-Problem

Definition (PARTITION-Problem)

Das PARTITION-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} a_i?$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Satz

PARTITION ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis:

PARTITION $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$
- Prüfe deterministisch, ob $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} a_i$
- Daher kann PARTITION in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION (2)

PARTITION ist $\mathcal{NP}$-hart

- Wir zeigen: SUBSETSUM $\leq_p$ PARTITION
- Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ mit $a_{k+1} = A + s$ und $a_{k+2} = 2A - s$, wobei $A = \sum_{i=1}^{k} a_k$.
- f kann von einer DTM in polynomieller Zeit berechnet werden.
- Wenn $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ Lösung $I \subseteq \{1, \ldots, k+2\}$ hat, dann $\sum_{i \in I} a_i = 2A = \sum_{i \in \{1,\ldots,k+2\} \setminus I} a_i$.
  - Nicht $k+1$ und $k+2$ in I, da sonst die Summe zu groß ist.
  - Wenn $k+2 \in I$, dann $I' = I \setminus \{k+2\}$.
  - Wenn $k+1 \in I$, dann $I' = \{1, \ldots, k\} \setminus I$.
  - In beiden Fällen ist $\sum_{i \in I'} = s$ und I' ist Lösung von $((a_1, \ldots, a_k), s)$.
- Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung von $((a_1, \ldots, a_k), s)$, dann ist $I \cup \{k+2\}$ eine Lösung für $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$.
- Daher gilt $((a_1, \ldots, a_k), s)$ lösbar g.d.w. $f((a_1, \ldots, a_k), s)$ lösbar
- SUBSETSUM $\leq_p$ PARTITION

Beispiel

- Sei ((1,2,3,4,5,6),14) eine SUBSETSUM-Instanz.
- PARTITION-Instanz dazu: (1,2,3,4,5,6,35,28)
- Lösung $I = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ da $1 + 3 + 4 + 6 + 28 = 42 = 2 + 5 + 35$.
- Lösung der SUBSETSUM-Instanz $\{1, 3, 4, 6\}$

Das BINPACKING-Problem

Definition (BINPACKING-Problem)

Das BINPACKING-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, die Behältergröße $b \in \mathbb{N}$, und die Anzahl der Behälter m

gefragt: Kann man alle gegeben Zahlen so auf die Behälter aufteilen, sodass keiner der Behälter überläuft? Formal: Gibt es eine totale Funktion $assign : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$, sodass für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt: $\sum_{assign(i)=j} a_i \leq b$?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BINPACKING

Satz

BINPACKING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: BINPACKING $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch für jede Zahl a_i in welchen Behälter sie gehört.
- Prüfe, dass die geratene Zuordnung keinen Behälter überlaufen lässt.
- BINPACKING kann daher in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BINPACKING (2)

BINPACKING ist $\mathcal{NP}$-hart

- Sei $(a_1, \ldots, a_k)$ eine PARTITION-Instanz.
- Sei $f(a_1, \ldots, a_k)$ die BINPACKING-Instanz mit Zahlen $a_1, \ldots, a_k$, Behältergröße $b = \lfloor \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{2} \rfloor$ und $m = 2$ Behältern.
- Wenn $\sum_{i=1}^{k} a_i$ ungerade, dann ist die PARTITION-Instanz unlösbar und die BINPACKING-Instanz ebenso.
- Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ Lösung für PARTITION, dann ist

$$assign(i) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i \in I \\ 2, & \text{wenn } i \notin I \end{cases}$$

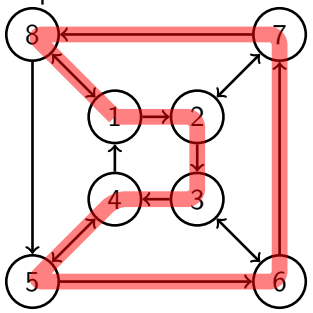
  eine Lösung für BINPACKING.
- Mit $I = \{i \mid 1 \leq i \leq k, assign(i) = 1\}$ kann aus Lösung für BINPACKING eine Lösung für PARTITION erstellt werden.
- f ist polynomiell berechenbar: PARTITION $\leq_p$ BINPACKING.

Hamiltonische Kreise

Definition

In einem gerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis, ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.
Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Beispiel:



Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition (DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem)

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Satz

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

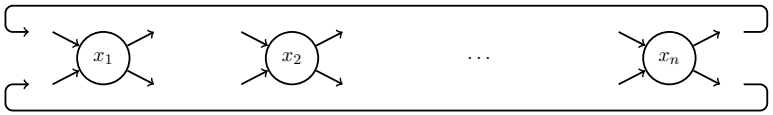
Beweis: DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\in \mathcal{NP}$:

- Rate nichtdeterministisch die Permutation π
- Verifiziere, ob $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$ gilt.
- DIRECTED-HAMILTON-CYCLE kann daher kann auf einer NTM in Polynomialzeit entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (2)

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-hart

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ DIRECTED-HAMILTON-CYCLE
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau 3 Literale enthält. Sei $Var(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Erzeuge zunächst

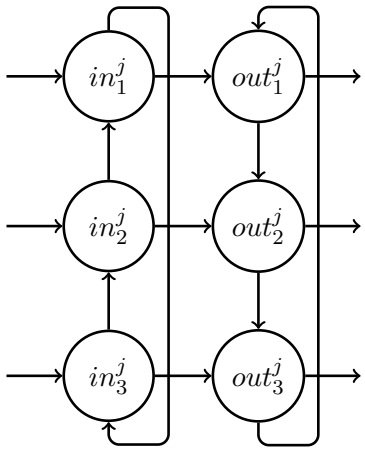


- Idee: Hamilton-Kreis läuft oben durch x_i, wenn $I(x_i) = 1$ und unten durch x_i, wenn $I(x_i) = 0$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (3)

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-hart

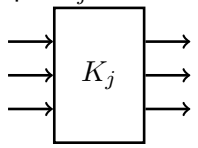
Teilgraphen K_j für jede Klausel K_j:



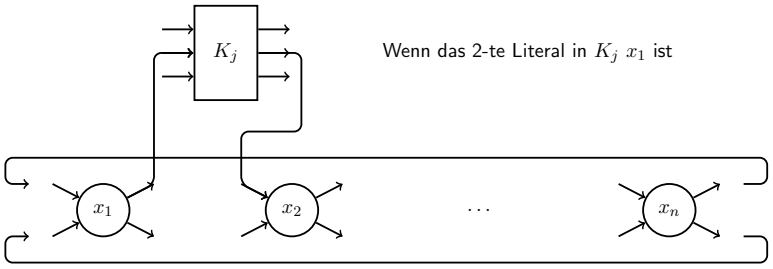
Eigenschaften:

- Jeder Hamilton-Kreis, der durch Eingang in_i^j in K_j hereingeht, muss K_j durch den Knoten out_i^j verlassen. (sonst bleibt man stecken)
- Der Graph kann einmal, zweimal oder dreimal in einem Hamilton-Kreis durchlaufen werden

Teilgraph K_j abstrakt als Bauteil:



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (4)



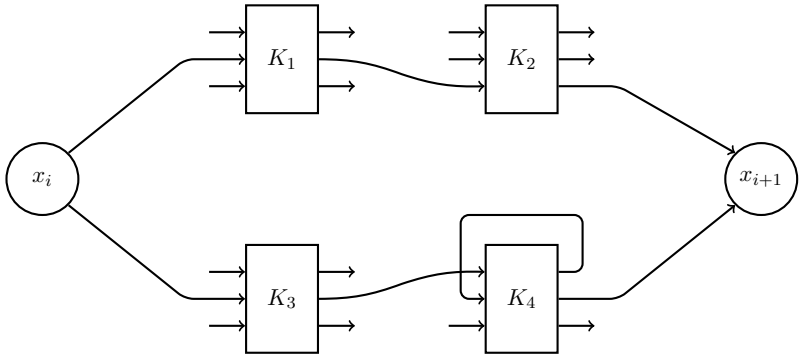
Verbindungen:

- i-ter Ein-/Ausgang von K_j wird zwischen x_k und x_{k+1} verbunden, wenn
  i-tes Literal in Klausel K_j ist x_k oder $\neg x_k$
- obere Verbindung, wenn Literal x_k ist
- untere Verbindung, wenn Literal $\neg x_k$ ist
- mehrere K_j hintereinander erlaubt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (5)

Beispiel: $F = K_1 \wedge K_2 \wedge K_3 \wedge K_4$ eine 3-CNF, sodass

- x_i kommt an 2. Position in K_1 vor
- x_i kommt an 3. Position in K_2 vor
- $\neg x_i$ kommt an 2. Position in K_3 vor
- $\neg x_i$ kommt an 1. und 2. Position in K_4 vor



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von DIRECTED-HAMILTON-CYCLE (6)

- Konstruktion des Graph in Polynomialzeit möglich:
  Füge iterativ die K_j-Graphen ein.
- Alle Anschlüsse werden angeschlossen: der Graph ist wohl geformt.
- Wenn der Graph einen Hamilton-Kreis hat, dann läuft der Kreis entweder oben durch x_i oder unten durch x_i.
  - Das liefert Belegung $I(x_i) = 1$ bzw. $I(x_i) = 0$
  - Da jedes K_j mindestens einmal von Hamilton-Kreis durchlaufen wird: Jede Klausel wird durch I erfüllt.
- Wenn I Belegung mit $I(F) = 1$, dann gibt es einen Hamilton-Kreis:
  - Durchlaufe Knoten x_i oben, wenn $I(x_i) = 1$ und unten, wenn $I(x_i) = 0$.
  - Durchlaufe K_j ein bis drei Mal, je nachdem welche und wie viele Literale in der Klausel K_j durch I wahr gemacht werden.
- Daher 3-CNF-SAT $\leq_p$ DIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Hamilton-Kreis im ungerichteten Graph

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Hamilton-Kreis ist eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$?

Definition (UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem)

Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Satz

UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\in \mathcal{NP}$:

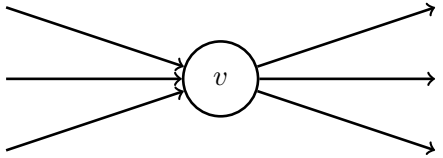
- Rate die Permutation π nichtdeterministisch
- Verifiziere, ob $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$ gilt.
- Dies kann auf einer NTM in Polynomialzeit durchgeführt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

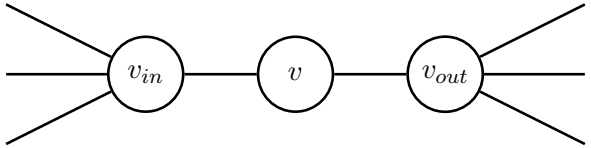
UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-hart:

- Sei f die Funktion, die aus einem gerichteten Graphen (V, E) einen ungerichteten Graphen macht, sodass
  $f(V) = \bigcup\{\{v_{in}, v, v_{out}\} \mid v \in V\}$ und
  $f(E) = \{\{u_{out}, v_{in}\} \mid (u, v) \in E\} \cup \bigcup\{\{\{v_{in}, v\}, \{v, v_{out}\}\} \mid v \in V\}$.

  D.h. jeder Knoten v mit Ein- und Ausgängen:



  wird ersetzt durch



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-hart:

- In $f(G)$ kann der Knoten v durch einen Hamilton-Kreis nur in einer Richtung durchlaufen werden
  (von v_{in} durch v durch v_{out} oder umgekehrt).
- Falls $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
  oder $v_{out,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{in,\pi(1)}, \ldots v_{out,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{in,\pi(n)}, v_{out,\pi(1)}$
  ein ungerichteter Hamilton-Kreis,
  dann ist $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}$ gerichteter Hamilton Kreis.
- Umgekehrte Richtung: Trivial:
- Da f in Polynomialzeit berechenbar ist, folgt
  DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE.

Das TRAVELLING-SALESMAN-Problem

Definition (TRAVELLING-SALESMAN-Problem)

Das TRAVELLING-SALESMAN-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein Menge von Knoten (Städten) $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, eine $(n \times n)$-Matrix $(M_{i,j})$ mit Entfernungen $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ zwischen den Städten v_i und v_j, sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Gibt es eine Rundreise, die alle Städte besucht, der Startort gleich dem Zielort ist, und nicht länger als k ist?

Formal: Gibt es eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)}) + M_{\pi(n)+\pi(1)} \leq k$?

Interaktive Webanwendung zu TSP:
https://www-m9.ma.tum.de/games/tsp-game/index_de.html

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELLING-SALESMAN

Satz

Das TRAVELLING-SALESMAN-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: TRAVELLING-SALESMAN $\in \mathcal{NP}$:

- Rate die Permutation π nichtdeterministisch
- Prüfe, ob $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)}) + M_{\pi(n)+\pi(1)} \leq k$ gilt.
- Dies kann auf einer NTM in Polynomialzeit durchgeführt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELLING-SALESMAN

TRAVELLING-SALESMAN ist $\mathcal{NP}$-hart:
Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$Mi, j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \{i, j\} \in E \\ 2, & \text{wenn } \{i, j\} \notin E \end{cases}$$

- Wenn G einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat, dann ist das eine Rundreise der Länge n.
- Wenn $f(G)$ eine Rundreise der Länge $\leq n$ hat, dann muss die Länge genau n sein, und es können nur Kanten mit Entfernung 1 verwendet werden. Daher hat G einen ungerichteten Hamilton-Kreis.

Da f Polynomialzeit von einer DTM berechnet werden kann:
UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELLING-SALESMAN.

Das GRAPH-COLORING-Problem

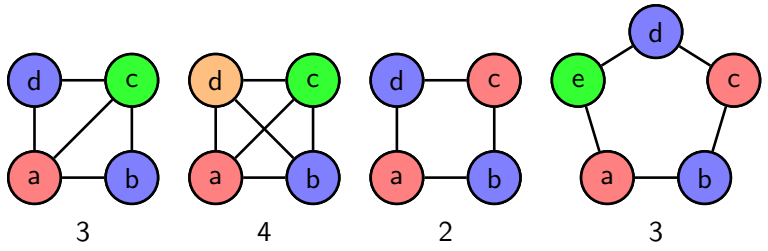
Definition (GRAPH-COLORING-Problem)

Das GRAPH-COLORING-Problem lässt sich in der gegeben/gefragt-Notation wie folgt formulieren:

gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

gefragt: Gibt es Färbung der Knoten in V mit $\leq k$ Farben, sodass keine zwei benachbarten Knoten in G, die gleiche Farbe erhalten?

Beispiel



Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Satz

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: GRAPH-COLORING $\in \mathcal{NP}$

- Rate nichtdeterministisch die Farbe aus $\{1, \ldots, k\}$ für jeden Knoten $v \in V$.
- Prüfe, dass die Farben von u und v stets verschieden sind, für alle $\{u, v\} \in E$.
  Das geht in (deterministischer) Polynomialzeit.
- Daher kann GRAPH-COLORING auf einer NTM in polynomieller Zeit entschieden werden.

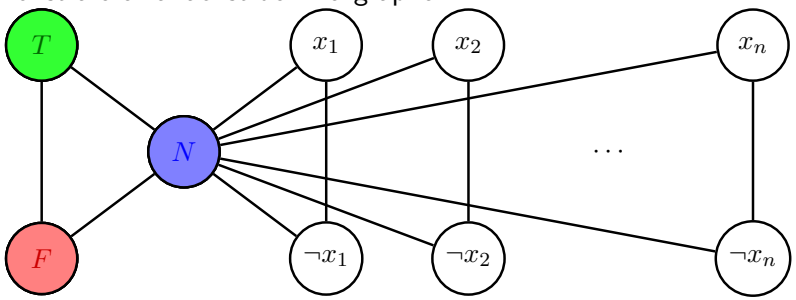
$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (2)

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-hart.

- Ziel: 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING
- Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau 3 Literale enthält
- Sei $Var(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Wir erzeugen ein GRAPH-COLORING Problem mit $k = 3$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (3)

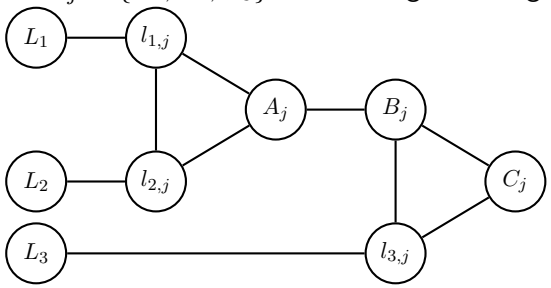
Konstruiere zunächst den Teilgraphen



- Wenn Graph 3-färbbar ist, dann müssen T, N, F mit allen drei Farben gefärbt werden.
- O.B.d.A. seien dies genau die Farben T, N, F mit genau den Knoten
- Für 3-Färbung muss $(x_i, \neg x_i)$ mit (T,F) oder (F,T) gefärbt werden.
- Daher: 3-Färbung erzeugt Belegung $I(x_i) = 1$, wenn x_i mit T gefärbt, $I(x_i)$=0, wenn x_i mit F gefärbt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (3)

Für jede Klausel $K_j = \{L_1, L_2, L_3\}$ wird der folgende Teilgraph G_j erzeugt:



- Idee: G_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.
- Verbinde $l_{i,j}$ mit x_k oder $\neg x_k$ aus dem anderen Graphen.
- Farben der L_i daher F oder T.
- Wenn alle L_i mit F gefärbt, kann C_j nicht mit T (sondern nur mit F) gefärbt werden.
- Wenn mind. ein L_i mit T, kann C_j mit T gefärbt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (4)

- Erzeuge alle Teilgraphen G_j für $K_1, \ldots, K_m$
- Verbinde $l_{i,j}$ mit x_k wenn $L_{i,j} = x_k$ und mit $\neg x_k$ wenn $L_{i,j} = \neg x_k$
- Verbinde jeweils C_j mit N und C_j mit F.
  (Zulässige Färbung muss C_j auf T setzen)

Korrektheit:

- Sei Graph 3-färbbar
- Dann sind alle C_j mit T gefärbt
- x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt
- Belegung $I(x_i) = 1$ wenn x_i mit T und $I(x_i) = 0$ sonst
- I macht Formel F wahr, da in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht wird.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING (5)

- Analog kann aus erfüllendem I eine 3-Färbung erzeugt werden.
- Berechnung des Graph geht in Polynomialzeit.
- Daher 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING.
- Da 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$-hart, folgt:

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-hart

Zusammenfassung: Polynomielle Reduktionen