LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2019

Kontextsensitive und Typ 0-Sprachen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 29. Juni 2019

Inhalt

- Typ 1- und Typ 0-Sprachen
- Maschinenmodelle, die dazu passen
- Turingmaschinen und linear beschränkte Turingmaschinen
- LBA-Probleme

Erinnerung: Typ 1- und Typ 0-Sprachen

- Typ 1: $|\ell| \leq |r|$ für alle Produktionen $\ell \to r$
- Typ 1-Grammatik = kontextsensitive Grammatik
- aber (im Gegensatz zu Typ 2): $\ell \in (\Sigma \cup V)^+$
- Typ 0: alles erlaubt
- In manchen Büchern werden unsere Typ 1-Grammatik auch monotone Grammatiken genannt
- In manchen Büchern wird für kontextsensitive Grammatiken gefordert: Produktionen von der Form $\alpha_1 A \alpha_2 \to \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$ mit $\alpha_3 \neq \varepsilon$

Kuroda-Normalform für Typ 1-Sprachen

(benannt nach dem japanischen Linguisten Sige-Yuki Kuroda)

Definition

Eine Typ 1-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist in Kuroda-Normalform, falls alle Produktionen in P einer der folgenden vier Formen entsprechen:

$$A \to a \qquad A \to B \qquad A \to BC \qquad AB \to CD$$

wobei $a \in \Sigma$ und $A, B, C, D \in V$.

Bemerkung: Die Kuroda-Normalform „erweitert“ kontextfreie Grammatiken um Regeln der Form $AB \to CD$.

Herstellen der Kuroda-Normalform

Satz

Sei L eine kontextsensitive Sprache mit $\varepsilon \notin L$. Dann gibt es eine Grammatik in Kuroda-Normalform, die L erzeugt.

Beweis: Algorithmus 10 (nächste Folie) bewerkstelligt dies.

Algorithmus 10: Herstellung der Kuroda-Normalform

Eingabe: Eine Typ 1-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\varepsilon \notin L(G)$
Ausgabe: Eine Typ 1-Grammatik in Kuroda-Normalform die $L(G)$ erzeugt.
Beginn

Entfernt alle $a \in \Sigma$ aus den Regeln bis auf neue $A \to a$-Regeln

für alle $a \in \Sigma$ **tue**

/* Führe neue Variable A_a für a ein, und ersetze Vorkommen von a durch das Nichtterminal */

$G := (V \dot\cup \{A_a\}, \Sigma, \{\ell[A_a/a] \to r[A_a/a] \mid \ell \to r \in P\}, S)$;

/* Nun sind alle Regeln von der Form $A \to a$ oder $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$ mit $A_i, B_j \in V$ */

für alle $A \to B_1 \cdots B_n \in P$ *mit* $n > 2$ **tue**

Seien $C_1, \ldots, C_{n-2}$ neue Variablen;

$V := V \dot\cup \{C_1, \ldots, C_{n-2}\}$;

/* Ersetze in P die Produktion $A \to B_1 \cdots B_n$ durch neue Regeln */

$P := (P \setminus \{A \to B_1 \cdots B_n\})$
$\quad \dot\cup \{A \to B_1 C_1\} \cup \{C_i \to B_{i+1} C_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n-3\} \cup \{C_{n-2} \to B_{n-1} B_n\}$;

für alle $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n \in P$ *mit* $m > 2$ *oder* $n > 2$ **tue**

Seien $D_2, \ldots, D_{n-1}$ neue Variablen;

$V := V \dot\cup \{D_2, \ldots, D_{n-1}\}$;

/* Ersetze in P die Produktion $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$ durch neue Regeln */

$P := (P \setminus \{A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n\})$
$\quad \dot\cup \{A_1 A_2 \to B_1 D_2\} \cup \{D_i A_{i+1} \to B_i D_{i+1} \mid i = 2, \ldots, m-1\}$
$\quad \dot\cup \{D_i \to B_i D_{i+1} \mid i = m, \ldots, n-2\} \cup \{D_{n-1} \to B_{n-1} B_n\}$

Gebe die so entstandene Grammatik aus;

Algorithmus 10: Herstellung der Kuroda-Normalform

Eingabe: Eine Typ 1-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\varepsilon \notin L(G)$
Ausgabe: Eine Typ 1-Grammatik in Kuroda-Normalform die $L(G)$ erzeugt.
Beginn

Entfernt alle $a \in \Sigma$ aus den Regeln bis auf neue $A \to a$-Regeln

"Zerhacken" von rechten Seiten wie bei Chomsky-NF

für alle $a \in \Sigma$ **tue**
  /* Führe neue Variable A_a für a ein, und ersetze Vorkommen von a durch das Nichtterminal */
  $G := (V \cup \{A_a\}, \Sigma, \{\ell[A_a/a] \to r[A_a/$
/* Nun sind alle Regeln von der ~~Form~~ $A \to a$ oder $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$ mit $A_i, B_j \in V$ */
für alle $A \to B_1 \cdots B_n \in P$ *mit* $n > 2$ **tue**
  Seien $C_1, \ldots, C_{n-2}$ neue Variablen;
  $V := V \cup \{C_1, \ldots, C_{n-2}\}$;
  /* Ersetze in P die Produktion $A \to B_1 \cdots B_n$ durch neue Regeln */
  $P := (P \setminus \{A \to B_1 \cdots B_n\})$
    $\cup \{A \to B_1 C_1\} \cup \{C_i \to B_{i+1} C_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n-3\} \cup \{C_{n-2} \to B_{n-1} B_n\}$;
für alle $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n \in P$ *mit* $m > 2$ *oder* $n > 2$ **tue**
  Seien $D_2, \ldots, D_{n-1}$ neue Variablen;
  $V := V \cup \{D_2, \ldots, D_{n-1}\}$;
  /* Ersetze in P die Produktion $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$ durch neue Regeln */
  $P := (P \setminus \{A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n\})$
    $\cup \{A_1 A_2 \to B_1 D_2\} \cup \{D_i A_{i+1} \to B_i D_{i+1} \mid i = 2, \ldots, m-1\}$
    $\cup \{D_i \to B_i D_{i+1} \mid i = m, \ldots, n-2\} \cup \{D_{n-1} \to B_{n-1} B_n\}$
Gebe die so entstandene Grammatik aus;

Algorithmus 10: Herstellung der Kuroda-Normalform

Eingabe: Eine Typ 1-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $\varepsilon \notin L(G)$
Ausgabe: Eine Typ 1-Grammatik in Kuroda-Normalform die $L(G)$ erzeugt.
Beginn

Entfernt alle $a \in \Sigma$ aus den Regeln bis auf neue $A \to a$-Regeln

für alle $a \in \Sigma$ **tue**

/* Führe neue Variable A_a für a ein, und ersetze Vorkommen von a durch das Nichtterminal */

$G := (V \cup \{A_a\}, \Sigma, \{\ell[A_a/a] \to r[A_a/$

"Zerhacken" von rechten Seiten wie bei Chomsky-NF

/* Nun sind alle Regeln von der ~~Form~~ $A \to a$ oder $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$ mit $A_i, B_i \in V$ */

für alle $A \to B_1 \cdots B_n \in P$ *mit* $n > 2$ **tue**

Seien $C_1, \ldots, C_{n-2}$ neue Variablen;

$V := V \cup \{C_1, \ldots, C_{n-2}\}$;

/* Ersetze in P die Produktion $A \to B_1 \cdots B_n$ durch neue Regeln

$P := (P \setminus \{A \to B_1 \cdots B_n\})$

$\cup \{A \to B_1 C_1\} \cup \{C_i \to B_{i+1} C_{i+1} \mid i = 1, \ldots, n-3\} \cup$

für alle $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots$ ~~$B_n \in P$ mit $m > 2$~~

Seien $D_2, \ldots, D_{n-1}$ neue Variablen;

$V := V \cup \{D_2, \ldots, D_{n-1}\}$;

/* Ersetze in P die Produktion $A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n$ durch neue Reg

$P := (P \setminus \{A_1 \cdots A_m \to B_1 \cdots B_n\})$

$\cup \{A_1 A_2 \to B_1 D_2\} \cup \{D_i A_{i+1} \to B_i D_{i+1} \mid i = 2, \ldots, m$

$\cup \{D_i \to B_i D_{i+1} \mid i = m, \ldots, n-2\} \cup \{D_{n-1} \to B_{n-1}$

Gebe die so entstandene Grammatik aus;

Effekt:
Ableitung vorher:
$xA_1 \cdots A_m y$
$\Rightarrow xB_1 \cdots B_n y$
Ableitung nachher:
$xA_1A_2 \cdots A_m y$
$\Rightarrow xB_1D_2A_3 \cdots A_m y$
$\Rightarrow xB_1B_2D_3A_4 \cdots A_m y$
$\Rightarrow \cdots$
$\Rightarrow xB_1 \cdots B_{m-2}D_{m-1}A_m y$
$\Rightarrow xB_1 \cdots B_{m-1}D_m y$
$\Rightarrow xB_1 \cdots B_{m-1}B_m D_{m+1} y$
$\Rightarrow \cdots$
$\Rightarrow xB_1 \cdots B_{n-2}D_{n-1} y$
$\Rightarrow xB_1 \cdots B_{n-2}B_{n-1}B_n y$

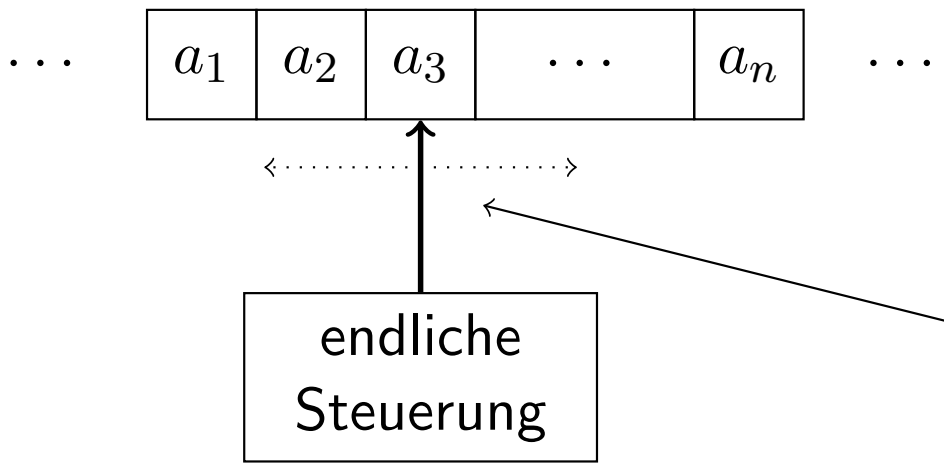
Motivation für Turingmaschinen

Einschränkungen der Kellerautomaten

- PDAs erkennen genau die CFLs, daher müssen Automaten für Typ 1- und Typ 2-Sprachen „mehr können“
- Wesentliche Beschränkung bei PDAs: Zugriff auf Speicher nur von oben möglich
- Z.B. kann man $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ nicht mit PDA erkennen, da man die Anzahl i
  - . . . beim Lesen der $a's$ im Keller speichert;
  - . . . beim Lesen der $b's$ vergleichen muss und das geht nur durch sukzessives Entnehmen aus dem Keller;
  - beim Lesen der $c's$ nicht mehr hat!

  Mit beliebigem Lesen des Speichers wäre es kein Problem, $a^i b^i c^i$ zu erkennen.

Turingmaschine:Illustration



Band mit Feldern
(nach links und rechts unbeschränkt)

Schreib-Lesekopf
(Bewegung nach links/rechts
möglich)

Formale Definition der Turingmaschine

Definition (Turingmaschine)

Eine Turingmaschine (TM) ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet,
- $\Gamma \supset \Sigma$ ist das (endliche) Bandalphabet,
- δ ist die Zustandsüberführungsfunktion
  - deterministische TM (DTM):
    $$\delta : Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\},$$
  - nichtdeterministische TM (NTM):
    $$\delta : Z \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{L, R, N\})$$
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand,
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Blank-Symbol
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Zustandswechsel, informell

DTM: Ein Eintrag $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bedeutet:

Falls die TM im Zustand z ist und das Zeichen a an der aktuellen Position des Schreib-Lesekopfs ist, dann

- Wechsele in Zustand z'
- Ersetze a durch b auf dem Band
- Falls $x = L$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach links
- Falls $x = R$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach rechts
- Falls $x = N$: Lasse Schreib-Lesekopf unverändert (Neutral)

Zustandswechsel, informell

DTM: Ein Eintrag $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bedeutet:

Falls die TM im Zustand z ist und das Zeichen a an der aktuellen Position des Schreib-Lesekopfs ist, dann

- Wechsele in Zustand z'
- Ersetze a durch b auf dem Band
- Falls $x = L$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach links
- Falls $x = R$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach rechts
- Falls $x = N$: Lasse Schreib-Lesekopf unverändert (Neutral)

NTM: $\delta(z, a)$ ist eine Menge solcher möglichen Schritte, und die NTM macht in einem Lauf irgendeinen davon (nichtdeterministisch)

Konfigurationen

Definition (Konfiguration einer Turingmaschine)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^*$

D.h. eine Konfiguration ist ein Wort wzw', sodass:

- die TM ist im Zustand z,
- auf dem Band steht $\cdots \square\square ww' \square\square \cdots$ und
- der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w'

Konfigurationen

Definition (Konfiguration einer Turingmaschine)

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Wort $k \in \Gamma^* Z \Gamma^*$

D.h. eine Konfiguration ist ein Wort wzw', sodass:

- die TM ist im Zustand z,
- auf dem Band steht $\cdots \square\square ww' \square\square \cdots$ und
- der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w'

Definition (Startkonfiguration einer TM)

Für ein Eingabewort w ist die Startkonfiguration einer TM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ das Wort $z_0 w$.

Im Spezialfall $w = \varepsilon$ ist die Startkonfiguration $z_0 \square$

D.h. am Anfang steht der Kopf auf dem ersten Symbol der Eingabe.

Transitionsrelation einer TM

Definition (Transitionsrelation für Konfigurationen einer TM)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine TM. Die Relation $\vdash_M$ ist definiert durch (wobei $\delta(z, a) = (z', c, x)$ für eine NTM $(z', c, x) \in \delta(z, a)$ meint):

- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m z' c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, N)$, $m \geq 0, n \geq 1, z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_{m-1} z' b_m c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, L)$, $m \geq 1, n \geq 1, z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, R)$, $m \geq 0, n \geq 2, z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' \square$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, R)$ und $m \geq 0, z \notin E$
- $z a_1 \cdots a_n \vdash_M z' \square c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, L)$ und $n \geq 1, z \notin E$

Transitionsrelation einer TM (2)

Weitere Notation dazu:

- $\vdash_M^i$: die i-fache Anwendung von $\vdash_M$
- $\vdash_M^*$ die reflexiv-transitive Hülle von $\vdash_M$
- Wenn M klar ist, schreiben wir nur $\vdash, \vdash^i$, bzw. $\vdash^*$.

Bemerkung:

Wir nehmen an, dass die TM anhält,
sobald sie einen Endzustand erreicht.

(Schöning-Buch erlaubt weiterrechnen)

Akzeptierte Sprache einer TM

Definition (Akzeptierte Sprache einer TM)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine TM.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^*, z \in E : z_0 w \vdash_M^* uzv\}$$

Akzeptierte Sprache einer TM

Definition (Akzeptierte Sprache einer TM)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine TM.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

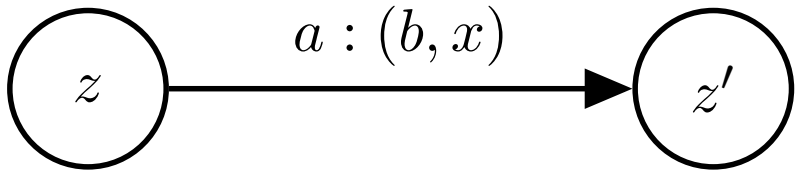
$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Gamma^*, z \in E : z_0 w \vdash_M^* uzv\}$$

Triviale Beispiele:

- Für Turingmaschinen der Form $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ mit $z_0 \in E$ gilt $L(M) = \Sigma^*$, denn diese Turingmaschinen akzeptieren jede Eingabe sofort.
- Für Turingmaschinen der Form $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \emptyset)$ gilt $L(M) = \emptyset$, denn sie akzeptieren nie.

Notation als Zustandsgraph

- Darstellung analog zu DFA / NFA / PDA
- Für $(z', b, x) \in \delta(z, a)$ zeichnen wir

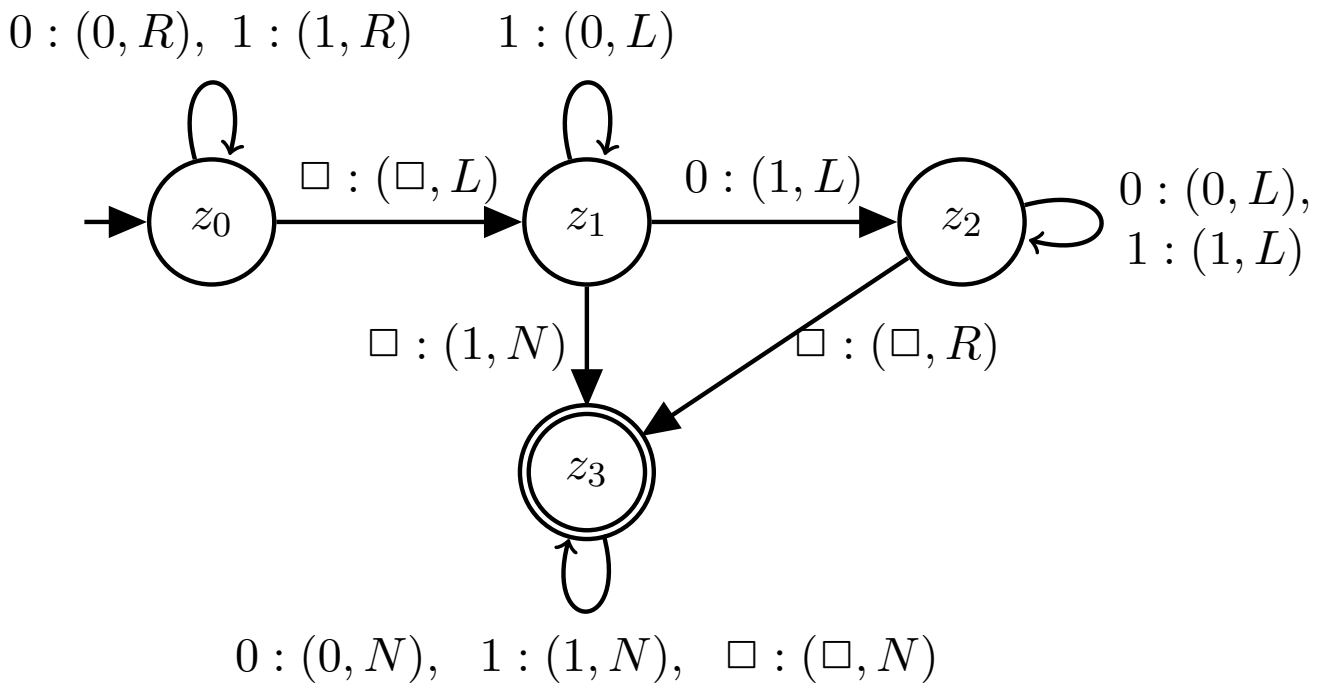


Beispiel (aus Schöning-Buch)

TM $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_3\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R) & \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) & \delta(z_0, \square) = (z_1, \square, L) \\ \delta(z_1, 0) = (z_2, 1, L) & \delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L) & \delta(z_1, \square) = (z_3, 1, N) \\ \delta(z_2, 0) = (z_2, 0, L) & \delta(z_2, 1) = (z_2, 1, L) & \delta(z_2, \square) = (z_3, \square, R) \\ \delta(z_3, 0) = (z_3, 0, N) & \delta(z_3, 1) = (z_3, 1, N) & \delta(z_3, \square) = (z_3, \square, N) \end{array}$$

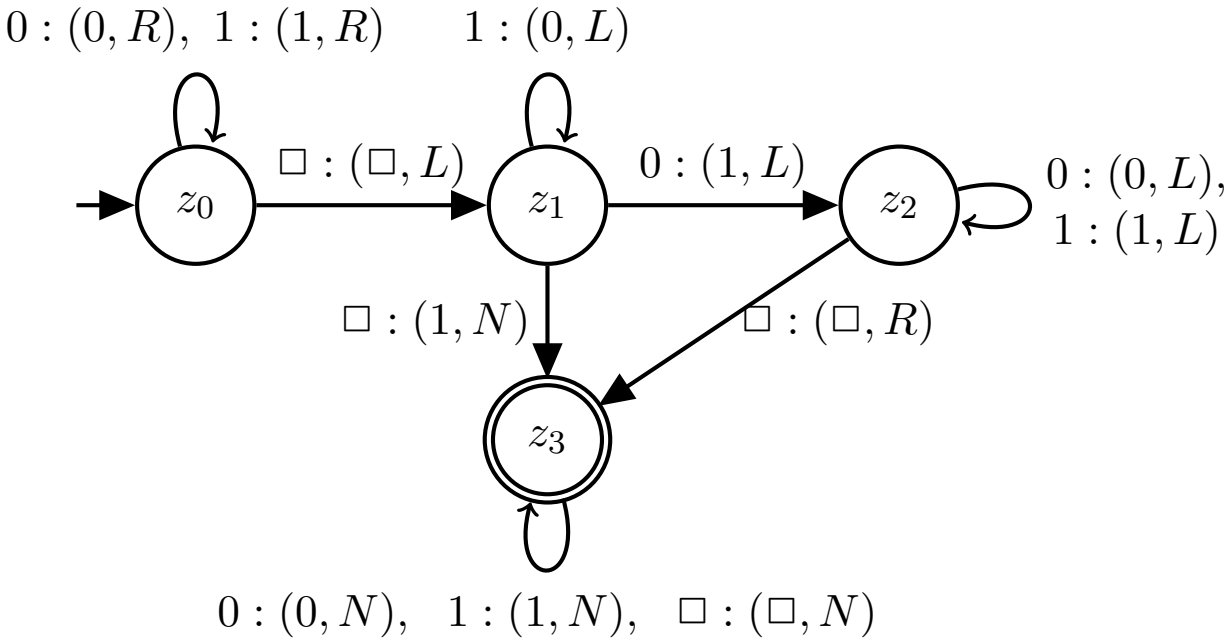
Zustandsgraph:



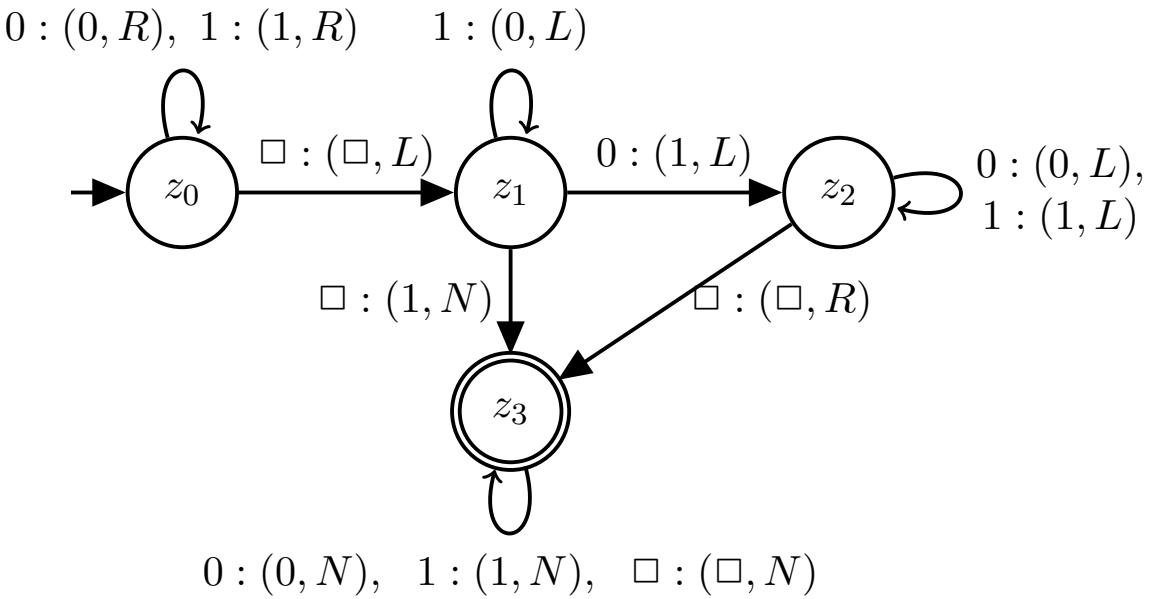
Beispiel (Forts.)

TM interpretiert Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ als Binärzahl und addiert 1:

- In z_0 wird das rechte Ende gesucht, dann in z_1 gewechselt
- In z_1 wird versucht 1 zur aktuellen Ziffer hinzu zu addieren:
  Gelingt das ohne Übertrag, dann in z_2
  Bei Übertrag: Weitermachen in z_1 und $+1$ zur nächsten Ziffer links
- In z_2: bis zum Anfang links laufen, dann in z_3.
- In z_3 wird akzeptiert.



Beispiellauf



$$
\begin{aligned}
& z_0 0011 \\
\vdash\ & 0 z_0 011 \\
\vdash\ & 00 z_0 11 \\
\vdash\ & 001 z_0 1 \\
\vdash\ & 0011 z_0 \square \\
\vdash\ & 001 z_1 1 \square \\
\vdash\ & 00 z_1 10 \square \\
\vdash\ & 0 z_1 000 \square \\
\vdash\ & z_2 0100 \square \\
\vdash\ & z_2 0100 \square \\
\vdash\ & z_2 \square 0100 \square \\
\vdash\ & \square z_3 0100 \square
\end{aligned}
$$

LBAs: Spezielle Turingmaschinen

Ideen und Notationen:

- Linear beschränkte Turingmaschinen:
  Schreib-Lesekopf darf den Bereich der Eingabe auf dem Band nicht verlassen
- Zum Erkennen des Endes:
  Letztes Symbol der Eingabe wird markiert
- Kopie des Alphabets:
  Für Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ bezeichne $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n\}$.
- Eingabe bei LBAs: Statt $a_1 \cdots a_m$ nun $a_1 \cdots a_{m-1}\widehat{a}_m$
- TM arbeitet auf $\Sigma' = \Sigma \cup \widehat{\Sigma}$
- Linkes Ende muss die Maschine selbst markieren!

LBAs: Definition

Definition (LBA)

Eine NTM $M = (Z, \Sigma \cup \widehat{\Sigma}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ heißt linear beschränkt (LBA, linear bounded automaton), wenn für alle $a_1 \cdots a_m \in \Sigma^+$ und alle Konfigurationen uzv mit $z_0 a_1 \cdots a_{m-1} \widehat{a}_m \vdash_M^* uzv$ gilt: $|uv| \leq m$.

Die akzeptierte Sprache eines LBA M ist

$$L(M) := \left\{ a_1 \cdots a_m \in \Sigma^* \,\middle|\, \begin{array}{l} z_0 a_1 \cdots a_{m-1} \widehat{a}_m \vdash_M^* uzv, \\ \text{wobei } u, v \in \Gamma^* \text{ und } z \in E \end{array} \right\}$$

Beachte: LBAs sind NTMs

Kontextsensitive Sprachen durch LBAs erkennbar

Satz

Jede kontextsensitive Sprache wird von einem LBA erkannt.

Beweis:

- Sprache sei als $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Kuroda-Normalform gegeben.
- Konstruiere TM mit Bandalphabet $((\Sigma \cup V) \cup \widehat{\Sigma \cup V} \cup \square) \subseteq \Gamma$
- Zur einfacheren Illustration unterscheiden wir nicht zwischen a und $\widehat{a}$ und schreiben a auch für den letzten Buchstaben der Eingabe, aber: Wir gehen davon aus, dass der LBA entsprechend programmiert ist, die notwendigen Ersetzungen zu machen.
- Die TM versucht nichtdeterministisch für $w \in \Sigma^*$ das Startsymbol S der Grammatik rückwärts herzuleiten, durch rückwärts Anwenden der Produktionen $\ell \to r \in P$: ersetze Vorkommen von r durch ℓ
- ...

Kontextsensitive Sprachen durch LBAs erkennbar (2)

- Für Produktionen $A \to a, A \to B$, $AB \to CD$ kann man direkt ersetzen, für den Fall $A \to BC$ wird BC durch $\square A$ ersetzt und dann alle Zeichen von links um eins nach rechts verschoben.
- Akzeptiere, wenn Startsymbol S alleine auf dem Band steht.
- Nichtdeterminismus: Welche Produktion wird rückwärts angewendet und für welches Vorkommen einer rechten Seite.

Kontextsensitive Sprachen durch LBAs erkennbar (2)

- Für Produktionen $A \to a, A \to B$, $AB \to CD$ kann man direkt ersetzen, für den Fall $A \to BC$ wird BC durch $\square A$ ersetzt und dann alle Zeichen von links um eins nach rechts verschoben.
- Akzeptiere, wenn Startsymbol S alleine auf dem Band steht.
- Nichtdeterminismus: Welche Produktion wird rückwärts angewendet und für welches Vorkommen einer rechten Seite.

Suche nach einer rechter Seite r:

- Beginne links an der Eingabe und laufe diese durch.
- Speichere im aktuellen Zustand: Symbol links vom Schreib-Lesekopf
- Entscheide mit dem aktuellen Symbol, ob es passende Produktion gibt (da rechte Seiten von Produktionen in Kuroda-Normalform aus maximal 2 Zeichen bestehen, genügt dies).

Kontextsensitive Sprachen durch LBAs erkennbar (3)

Ersetzung r durch ℓ:

- Für $A \to a$ und $A \to B$ wird das aktuelle Symbol durch A ersetzt, anschließend wird der nächste Schritt gestartet (d.h. es gibt einen Zustand, der den Schreib-Lesekopf nach links fährt).
- Für $AB \to CD$, wird B geschrieben und der Kopf nach links wechseln, dann A geschrieben und der nächste Schritt gestartet.
- Für $A \to BC$ schreibe A und wechsele nach links, schreibe $\square$, fahre ganz nach links und starte Prozedur zum Verschieben der Zeichen nach rechts, solange bis die Lücke geschlossen ist.

Verschieben nach rechts:

- Zustand speichert das linkeste Symbol
- Laufen nach rechts: aktuelles Symbol mit dem gespeicherten vertauschen
- Vertauschen beenden nachdem $\square$ mit einem anderen Symbol vertauscht wird.

Kontextsensitive Sprachen durch LBAs erkennbar (4)

Die TM ist ein LBA:

- Da für alle Produktionen $\ell \to r \in P$ gilt: $|\ell| \leq |r|$, werden nur Teilworte r durch gleichlange oder kürzere Teilworte l ersetzt
- TM kommt mit dem Platz der Eingabe aus □

Bemerkungen und Typ 0-Grammatiken

Bemerkung 1:

- Konstruktion funktioniert auch für Grammatiken nicht in Kuroda-Normalform, ist aber komplizierter:
- Speichere im Zustand $q-1$ Zeichen, wobei q die Länge der längsten rechten Seite
- Funktioniert immer noch mit endlich vielen Zuständen und als LBA

Bemerkung 2:

- Konstruktion funktioniert auch für Typ 0-Grammatiken: Platz allerdings dann unbeschränkt (kein LBA!)

Satz

Jede Typ i-Sprache (für i=0,1,2,3) wird von einer nichtdeterministischen Turing-Maschine akzeptiert.

LBAs erkennen kontextsensitive Sprachen

Satz

Sei M ein LBA. Dann ist $L(M)$ eine kontextsensitive Sprache.

Beweis:

- Sei $M = (Z, \Sigma \cup \widehat{\Sigma}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$
- Wir konstruieren eine Typ 1-Grammatik G mit $L(G) = L(M)$
- Idee für die Grammatik:
  1. Erzeuge beliebiges $w \in \Sigma^*$ und Startkonfiguration von M für w
  2. Simuliere LBA zum Prüfen, ob $w \in L(M)$
  3. Wenn LBA akzeptiert erzeuge w endgültig
- Variablen der Grammatik:
  - Neue Variablen S und A
  - Variablen der Form $\left\langle \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\rangle$ wobei $u \in \Sigma$ und $v \in \Gamma \cup (Z\Gamma)$

    Obere Komponenten ergeben Wort w, untere Komponenten ergeben TM-Konfiguration.

LBAs erkennen kontextsensitive Sprachen (2)

- Regeln zur Erzeugung von $w \in \Sigma^*$ Startkonfiguration zw:

$$P_1 := \left\{ S \to A \left\langle \begin{matrix} a \\ \widehat{a} \end{matrix} \right\rangle \mid a \in \Sigma \right\} \cup \left\{ A \to A \left\langle \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \right\rangle \mid a \in \Sigma \right\} \cup \left\{ A \to \left\langle \begin{matrix} a \\ z_0 a \end{matrix} \right\rangle \mid a \in \Sigma \right\}$$

- Worte $w \in L(M)$ mit $|w| < 2$ können dadurch nicht erzeugt werden, daher direkt alle Worte aus $L(M)$ der Länge < 2 erzeugen:

$$P_0 = \{ S \to w \mid |w| < 2, w \in L(M) \}$$

- Für $a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ mit $n > 1$ gilt: $S \Rightarrow_{P_1} A \left\langle \begin{matrix} a_n \\ \widehat{a}_n \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow^*_{P_1} \left\langle \begin{matrix} a_1 \\ z_0 a_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} a_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle \cdots \left\langle \begin{matrix} a_n \\ \widehat{a}_n \end{matrix} \right\rangle$
- Regelsatz P_2 simuliert M auf den unteren Komponenten. Wir bilden:

$$P_2 := \left\{ \left\langle \begin{matrix} a \\ u \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} b \\ v \end{matrix} \right\rangle \to \left\langle \begin{matrix} a \\ u' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} b \\ v' \end{matrix} \right\rangle \mid a, b \in \Sigma \text{ und } uv \to u'v' \in P_2^{\text{unten}} \right\}$$
$$\cup \left\{ \left\langle \begin{matrix} a \\ u \end{matrix} \right\rangle \to \left\langle \begin{matrix} a \\ u' \end{matrix} \right\rangle \mid a \in \Sigma \text{ und } u \to u' \in P_2^{\text{unten}} (\text{mit } u, u' \in \Gamma \cup (Z\Gamma)) \right\}$$

wobei wir P_2^{unten} noch definieren.

LBAs erkennen kontextsensitive Sprachen (3)

$$\begin{aligned} P_2^{\text{unten}} := & \{c\,za \to z'c\,b \mid \text{ für alle } c \in \Gamma \text{ und } (z', b, L) \in \delta(z, a)\} \\ & \cup \{za\,c \to b\,z'c \mid \text{ für alle } c \in \Gamma \text{ und } (z', b, R) \in \delta(z, a)\} \\ & \cup \{za \to zb \mid \text{ für alle } c \in \Gamma \text{ und } (z', b, N) \in \delta(z, a)\} \end{aligned}$$

Es gilt:

- $wzw' \vdash_M^* uz'u'$ g.d.w. $wzw' \Rightarrow_{P_2^{\text{unten}}}^* uz'u'$
- Dabei: Darstellung von z, z' in der Ableitung immer verbunden mit einem Zeichen aus Γ

P_3: Nach Akzeptieren des LBA, erstelle aus Tupelfolgen das Wort $a_1 \cdots a_n$

$$P_3 := \left\{ \left\langle \begin{matrix} b \\ za \end{matrix} \right\rangle \to b \mid z \in E, a \in \Gamma, b \in \Sigma \right\} \cup \left\{ \left\langle \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right\rangle \to b \mid a \in \Gamma, b, b' \in \Sigma \right\}$$

Es gilt $\left\langle \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\rangle \cdots \left\langle \begin{matrix} a_m \\ b_m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} a_{m+1} \\ zb_{m+1} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} a_{m+2} \\ b_{m+2} \end{matrix} \right\rangle \cdots \left\langle \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow_{P_3}^* a_1 \cdots a_n.$

LBAs erkennen kontextsensitive Sprachen (4)

- Sei
$$G = \left(\{S, A\} \cup \left\{ \left\langle \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\rangle \mid u \in \Sigma, v \in \Gamma \cup (Z\Gamma) \right\}, \Sigma, P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3, S \right).$$
- Dann gilt für alle $w \in \Sigma^*$: $S \Rightarrow_G^* w$ genau dann, wenn $w \in L(M)$.
- Des weiteren gilt, dass G eine kontextsensitive Grammatik ist, da es keine verkürzenden Regeln gibt. □

Satz von Kuroda

Theorem (Satz von Kuroda)

Kontextsensitive Sprachen werden genau von den LBAs erkannt.

Typ 0-Sprachen

Die Konstruktion der Typ 1-Grammatik aus einem LBA kann für beliebige NTMs angepasst werden:

- Zusätzliche Tupel $\left\langle \begin{matrix} \$ \\ c \end{matrix} \right\rangle$ für $c \in \Gamma \cup Z\Gamma$ und $\$$ ein neues Symbol.
- Darstellung von Konfiguration, die länger als das Eingabewort sind:
  $$\left\langle \begin{matrix} a_1 \\ c_1 \end{matrix} \right\rangle \dots \left\langle \begin{matrix} a_n \\ c_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \$ \\ c_{n+1} \end{matrix} \right\rangle \dots \left\langle \begin{matrix} \$ \\ z_i c_m \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \$ \\ c_r \end{matrix} \right\rangle$$
- Regelsatz P_3 enthält Regeln $\left\langle \begin{matrix} \$ \\ c_i \end{matrix} \right\rangle \to \varepsilon$ (nicht kontextsensitiv!)

Satz

Die durch (allgemeine) nichtdeterministischen Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die Typ 0-Sprachen.

TM vs. NTM

- Nichtdeterministische Turingmaschinen können durch deterministische Turingmaschinen simuliert werden: Probiere alle Berechnungsmöglichkeiten der NTM nacheinander durch
- Daher gilt der letzte Satz auch für DTM
- Unterschied zwischen NTMs und DTMs kommt erst zum Tragen, wenn wir das Laufzeitverhalten betrachten (s. Kapitel zur Komplexitätstheorie)

LBA-Probleme

1. LBA-Problem

Erkennen deterministische LBAs die selben Sprachen wie nichtdeterministische LBAs?

Bis heute ungeklärt!

2. LBA-Problem

Sind die kontextsensitiven Sprachen abgeschlossen unter Komplementbildung?

Formuliert 1964 von Kuroda, 1987 gelöst von Neil Immerman als auch Róbert Szelepcsényi
Überraschenderweise positiv:

Theorem (Satz von Immerman und Szelepcsényi)

Die kontextsensitiven Sprachen sind abgeschlossen unter Komplementbildung.

Satz von Immerman und Szelepcsényi

Beweisskizze:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ 1-Grammatik mit $L(G) = L$.
- Konstruiere LBA M für $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$
- Sei $w \in \Sigma^*$. M berechnet die exakte Anzahl $a \in N$ der von S aus erzeugbaren Satzformen der Länge $n \leq |w|$
- $a \leq (|V| + |\Sigma| + 1)^n$ und kann daher in $(k+1) \cdot n$-Bits dargestellt werden: Die passen auf das Band von M, wenn man Symbole für je $k+1$-Bitblöcke hat
- Anschließend: Zähle alle Satzformen u der Länge $\leq |n|$ aus $(V \cup \Sigma^*)$ auf (außer w selbst) und prüfe ob $S \Rightarrow_G^* u$ gilt
- Dabei wird ein Zähler mitgeführt, der hochgezählt wird, wenn Ableitung möglich ist
- Wenn der Zähler die Zahl a erreicht, dann akzeptiert M:
  Es wurden alle ableitbaren Worte der Länge $\leq n$ aufgezählt, w war nicht dabei. Also $w \notin L$ und damit $w \in \overline{L}$.

Satz von Immerman und Szelepcsényi (2)

Berechnung der Zahl a:

- Sei $a(m, n)$ die Zahl der Satzformen, die in höchstens m Schritten aus S erzeugbar sind und deren Länge n nicht überschreitet:
  $a(m, n) = |\{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid |w| \leq n, S \Rightarrow^{\leq m} w\}|)$.
- Wenn wir $a(i, n)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ berechnen, muss irgendwann $a(i, n) = a(i + 1, n)$ gelten, dann haben wir a gefunden.

Berechnung von $a(m, n)$

- Starte mit $a(0, n) = |\{S\}| = 1$
- Berechne $result = a(m + 1, n)$ durch Eingabe von $a(m, n)$
- Initial: $result = 0$.
- Äußere Schleife zählt alle Satzformen u bis zur Länge n auf
- Innere Schleife zählt nochmal alle Satzformen v bis zur Länge n auf.
- Vor Beginn der inneren Schleife: $count = 0$
- In der inneren Schleife: prüfe nichtdeterministisch, ob $S \Rightarrow^{\leq m} v$
  Wenn ja $count = count + 1$;
  Wenn $v = u$ oder $v \Rightarrow u$ gilt, $result = result + 1$
- Nach Ablauf der inneren Schleife, prüfe ob $count = a(m, n)$ gilt.
  Wenn nein, dann verwerfe diese nichtdeterministische Berechnung
  Wenn ja, dann war dies die richtige nichtdeterministische Berechnung und es wurde für alle in $\leq m$-Schritten aus S herleitbaren Satzformen v geprüft, ob durch Verlängern mit $=$ oder $\Rightarrow$ eine der Satzformen u herleitbar ist d. h. $result$ enthält den Wert $a(m + 1, n)$.

Zusammenfassung

- Typ 1-Sprachen: Kuroda-Normalform
- Turingmaschinen (DTM und NTM)
- linear beschränkte NTMs (LBAs)
- Satz von Kuroda: LBAs erkennen genau die Typ 1-Sprachen
- TMs erkennen genau die Typ 0-Sprachen
- LBA-Probleme