LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2019

Kontextfreie Sprachen: Teil II

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 11. Juni 2019

Inhaltsübersicht

- Effiziente Lösung des Wortproblems für CFLs:
  Der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus
- Kellerautomaten
- Deterministisch kontextfreie Sprachen
- Entscheidbarkeitsresultate für kontextfreie Sprachen

Effizientes Lösen des Wortproblems für CFLs

- Algorithmus für Typ 1-Sprachen hat exponentielle Laufzeit
- Jetzt: Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami für CFLs
- Veröffentlich in den 1960er Jahren
- Kurz: CYK-Algorithmus
- Polynomielle Laufzeit

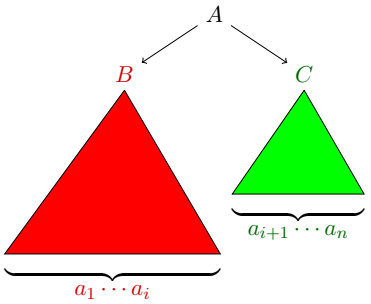
Idee des CYK-Algorithmus

- Eingabe:
  - CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform und
  - Wort $w \in \Sigma^*$
- Ausgabe:
  - ja, wenn $w \in L(G)$,
  - nein, wenn $w \notin L(G)$
- Grundidee des Algorithmus:
  (Rekursiver) Test, ob Variable A ein Wort u erzeugt.
- Verwende Test zum Prüfen, ob S das Wort w erzeugt.

Idee des CYK-Algorithmus (2)

Prüfe, ob $A \in V$ ein Wort $u = a_1 \cdots a_n$ erzeugt:

- Wenn $u = a \in \Sigma$, dann prüfe ob $A \to a \in P$
- Anderenfalls ($|u| > 1$) kann u nur erzeugt werden, wenn:
  - Es gibt Produktion $A \to BC \in P$
  - Es gibt Index $1 \leq i < n$, sodass:
    - B erzeugt $a_1 \cdots a_i$ und
    - C erzeugt $a_{i+1} \cdots a_n$



- Daher prüfe für alle $A \to BC \in P$ und alle i mit $1 \leq i < n$ rekursiv, ob B das Wort $w = a_1 \cdots a_i$ und C das Wort $a_{i+1} \cdots a_n$ erzeugt.

Beispiel

$S \to AB \mid BA, \quad A \to AA \mid AB \mid a, \quad B \to BB \mid b$

S erzeugt $bbbaab$, denn $S \to BA$ und

- B erzeugt bbb, denn $B \to BB$ und
  - B erzeugt bb, denn $B \to BB$ und $B \to b$ und $B \to b$
  - B erzeugt b, denn $B \to b$
- A erzeugt aab, denn $A \to AB$ und
  - A erzeugt aa, denn $A \to AA$ und
    - A erzeugt a, denn $A \to a$ und
    - A erzeugt a, denn $A \to a$
  - B erzeugt b, denn $B \to b$

Bevor der rekursive Algorithmus diesen richtigen Pfad findet, sucht er einige erfolglose ab, z.B. für $S \to AB$

- Prüfe, ob A erzeugt b und B erzeugt $bbab$ gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt bb und B erzeugt bab gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt bbb und B erzeugt ab gilt.
- Prüfe, ob A erzeugt $bbba$ und B erzeugt b gilt.

Naiv finden wiederholt dieselben Tests statt, z.B. ob A erzeugt b gilt.

Idee des CYK-Algorithmus (3)

- Effizienz: Statt Rekursion verwende dynamische Programmierung
- Algorithmus berechnet Menge $V(i,j) \subseteq V$, sodass

$$V(i,j) = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* a_i \cdots a_{i+j-1}\}$$

„$V(i,j)$ enthält alle $A \in V$, die $a_i \cdots a_{i+j-1}$ erzeugen“

- Berechnung der $V(i,j)$:
  - Starte mit $V(i,1) = \{A \mid A \to a_i \in P\}$.
  - Berechne $V(i,j)$ mit ansteigender Länge j.

Für $j > 1$ gilt:

$$A \in V(i,j) \text{ g.d.w.}$$
$$A \to BC \in P \text{ und } B \in V(i,k),\ C \in V(i+k, j-k)$$

Berechnung: für festes (i,j) betrachte alle k mit $k = 1, 2, \ldots, j-1$

- Finaler Schritt: Prüfe, ob $S \in V(1,n)$ ist.

Algorithmus 8: CYK-Algorithmus

Eingabe: CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-NF und Wort $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$
Ausgabe: `Ja`, wenn $w \in L(G)$ und `Nein`, wenn $w \notin L(G)$
Beginn

- **für** $i = 1$ *bis* n **tue**
  - $V(i,1) = \{A \in V \mid A \to a_i \in P\}$
- **für** $j = 2$ *bis* n **tue**
  - **für** $i = 1$ *bis* $n + 1 - j$ **tue**
    - $V(i,j) = \emptyset$;
    - **für** $k = 1$ *bis* $j - 1$ **tue**
      - $V(i,j) = V(i,j) \cup \left\{ A \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} A \to BC \in P, \\ B \in V(i,k), \\ C \in V(i+k, j-k) \end{array} \right\}$
- **wenn** $S \in V(1,n)$ **dann**
  - return `Ja`
- **sonst**
  - return `Nein`

Laufzeit des CYK-Algorithmus

- Drei geschachtelte Für-Schleifen
- Im inneren wird noch über alle Produktionen aus P iteriert
- Mit $n = |w|$ und $|P| =$ Anzahl der Iterationen kann die Laufzeitkomplexität mit $\mathcal{O}(n^3 \cdot |P|)$ abgeschätzt werden.

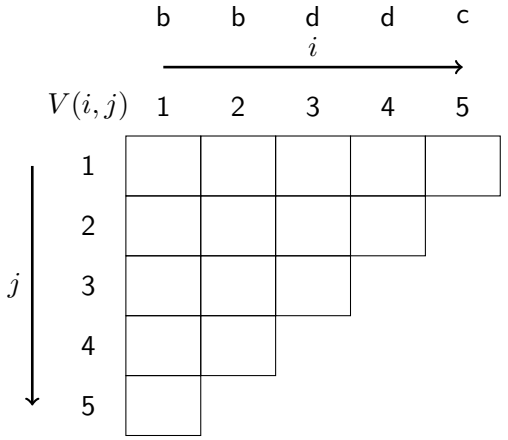
Theorem

Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen kann in Polynomialzeit entschieden werden.

Beispiel

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

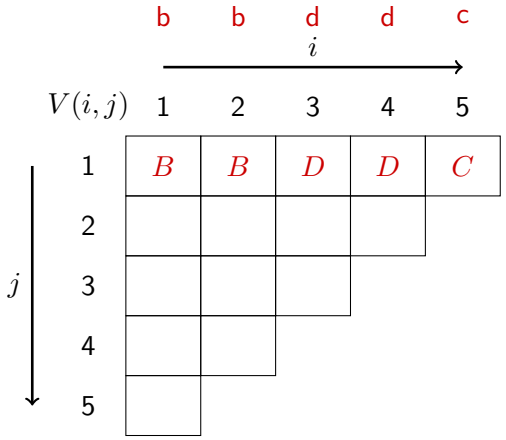
$V(i, j)$-Tabelle ist zunächst leer:



Beispiel (2)

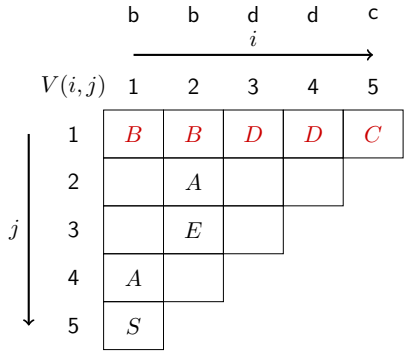
Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$

Füllen der $V(i, 1)$-Einträge:



Beispiel (3)

Sei $w = bbddc$ und $G = (\{S, A, B\}, \{b, c, d\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to AC,\ A \to BE,\ A \to BD,\ E \to AD,\ C \to c,\ B \to b,\ D \to d\}$



Da $S \in V(1, 5)$ gilt $w \in L(G)$

Kellerautomaten: Motivation

- Endliche Automaten (DFA & NFA) haben fast **keinen Speicher**
- Einziger Speicher dort: Zustände
- Daher endlicher Speicher
- Daher z.B. unmöglich $\{w\$\overline{w} \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$ zu erkennen: Man müsste beim Lesen von w alle gelesenen Zeichen speichern, um sie dann beim Lesen von $\overline{w}$ zu vergleichen.

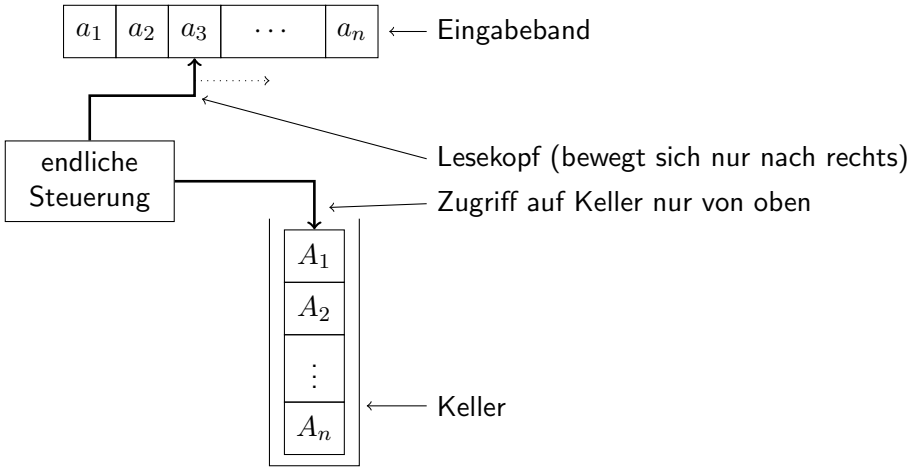
Kellerautomaten: Fügen einen Speicher hinzu

Kellerspeicher

- Kellerautomaten haben Kellerspeicher (Stack, LIFO-Speicher, last-in-first-out-Speicher)
- Uendlich großer Speicher als Stapel auf den **nur von oben** zugegriffen werden kann.
- Zustandsübergang:

	Endlicher Automat	Kellerautomat
Eingabe	Zustand und Zeichen	Zustand, Zeichen, oberstes Symbol im Keller
Ausgabe	nächster Zustand	Zustand, Sequenz von Kellersymbolen, die das erste Symbol ersetzen

Kellerautomat: Illustration



Kellerautomaten: Definition

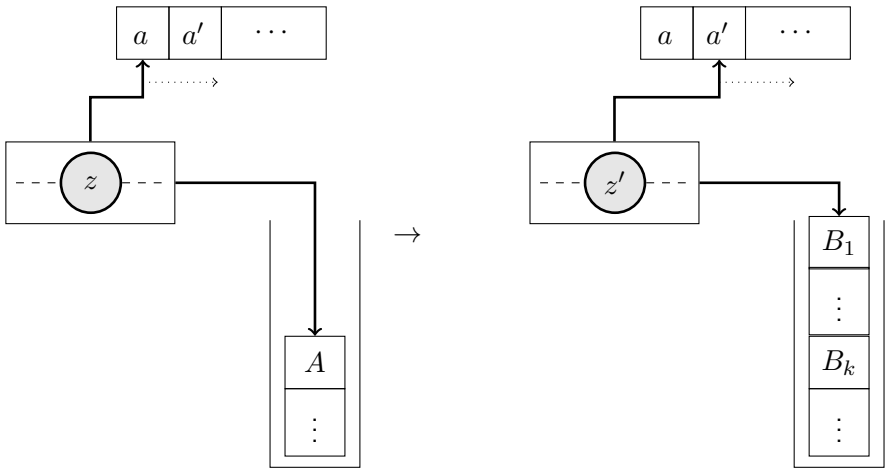
Definition (Kellerautomat, PDA)

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat (PDA, pushdown automaton) ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet,
- Γ ist das (endliche) Kelleralphabet,
- $\delta : (Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion (oder nur Überführungsfunktion)
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand und
- $\# \in \Gamma$ ist das Startsymbol im Keller.

$(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ bedeutet: im Zustand z bei Eingabe a und A oben auf dem Keller darf der PDA in Zustand z' wechseln: Dabei wird A durch $B_1 \cdots B_k$ ersetzt (B_1 liegt oben; $k = 0$ ist erlaubt)

Illustration: Zustandsübergang



$(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$

Bemerkungen

Mit unserer Definition von PDAs:

- PDAs sind nichtdeterministisch
- erlauben ε-Übergänge
- keine Endzustände!

Wir werden sehen:

- Akzeptieren: Wenn Eingabe verarbeitet und Keller leer
- Am Anfang: Keller enthält $\#$

Konfigurationen

- Buchführen während einer Berechnung mit dem PDA: akueller Zustand, Resteingabe, aktueller Kellerinhalt
- Wird dargestellt durch PDA-Konfiguration

Definition (Konfiguration eines Kellerautomaten)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein PDA.
Eine Konfiguration von M ist ein Tripel (z, w, W)
mit $z \in Z$, $w \in \Sigma^*$, $W \in \Gamma^*$.
Die Menge aller Konfigurationen für M ist daher $Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

- z ist der aktuelle Zustand
- w ist die Resteingabe
- W ist der Kellerinhalt

Transitionsrelation

Definition (Transitionsrelation für PDA-Konfigurationen)

Für einen PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ definieren wir
$\vdash_M \subseteq (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$ durch

- $(z, a_1 \cdots a_n, A_1 \cdots A_m) \vdash_M (z', a_2 \cdots a_n, W A_2 \cdots A_m)$ falls $(z', W) \in \delta(z, a_1, A_1)$ und
- $(z, w, A_1 \cdots A_m) \vdash_M (z', w, W A_2 \cdots A_m)$ falls $(z', W) \in \delta(z, \varepsilon, A_1)$.

Weitere Notation:

- $\vdash_M^*$ = reflexiv-transitive Hülle von $\vdash_M$
- $\vdash_M^i$ = i-fache Anwendung von $\vdash_M$
- Wenn M eindeutig: $\vdash$ statt $\vdash_M$

PDA: Akzeptierte Sprache

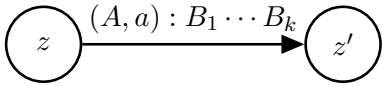
Definition (Akzeptierte Sprache eines PDA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein PDA. Die durch M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } z \in Z\}.$$

Notation als Zustandsgraph

- Darstellung analog zu DFA / NFA
- Für $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ zeichnen wir



- Beachte, dass das Startsymbol im Keller bekannt sein muss (überlicherweise $\#$)

Beispiel

PDA $M = (\{z_0, z_1\}, \{a, b\}, \{B, \#\}, \delta, z_0, \#)$ mit

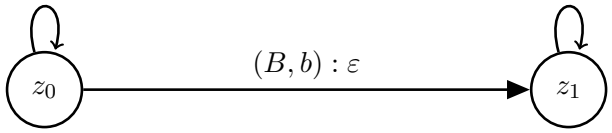
$\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, B\#)\}$ $\quad \delta(z_0, b, B) = \{(z_1, \varepsilon)\}$ $\quad \delta(z_1, \varepsilon, \#) = \{(z_1, \varepsilon)\}$

$\delta(z_0, a, B) = \{(z_0, BB)\}$ $\quad \delta(z_1, b, B) = \{(z_1, \varepsilon)\}$ $\quad \delta(z_0, \varepsilon, \#) = \{(z_0, \varepsilon)\}$

und $\delta(z_i, c, A) = \emptyset$ in allen anderen Fällen

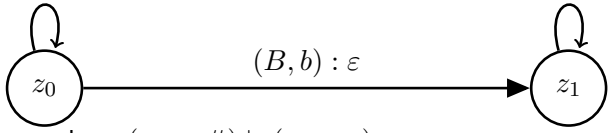
Zustandsgraph dazu:

$(\#, a) : B\#, \quad (\#, \varepsilon) : \varepsilon, \quad (B, a) : BB \qquad\qquad (B, b) : \varepsilon, \quad (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



Beispiel (2)

$(\#, a) : B\#, \quad (\#, \varepsilon) : \varepsilon, \quad (B, a) : BB \qquad\qquad (B, b) : \varepsilon, \quad (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



- M akzeptiert ε, denn $(z_0, \varepsilon, \#) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$.
- M akzeptiert das Wort $a^i b^i$ für $i > 0$, da

$$(z_0, a^i b^i, \#) \vdash (z_0, a^{i-1} b^i, B\#) \vdash^* (z_0, b^i, B^i\#)$$
$$\vdash (z_1, b^{i-1}, B^{i-1}\#) \vdash^* (z_1, \varepsilon, \#) \vdash (z_1, \varepsilon, \varepsilon).$$

- andere Worte werden nicht akzeptiert:
  - für jedes gelesene a wird ein B auf den Keller gelegt, das durch lesen von b abgebaut werden muss.
  - In z_0 können nur a's und **ein** b gelesen werden, dann Wechsel in z_1 und dort können nur b's gelesen werden.
- $L(M) = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Weiteres Beispiel

Sei $M = (\{z_0, z_1\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta, z_0, \#)$ mit

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, A\#), (z_1, \#)\} & \delta(z_0, \varepsilon, A) &= \{(z_1, A)\} \\
\delta(z_0, b, \#) &= \{(z_0, B\#), (z_1, \#)\} & \delta(z_0, \varepsilon, B) &= \{(z_1, B)\} \\
\delta(z_0, a, A) &= \{(z_0, AA), (z_1, A)\} & \delta(z_0, \varepsilon, \#) &= \{(z_1, \#)\} \\
\delta(z_0, b, A) &= \{(z_0, BA), (z_1, A)\} & \delta(z_1, a, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, a, B) &= \{(z_0, AB), (z_1, B)\} & \delta(z_1, b, B) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, b, B) &= \{(z_0, BB), (z_1, B)\} & \delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_1, \varepsilon, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ für alle anderen Fälle.

$L(M) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$:

- In z_0 werden die gelesenen Zeichen (als A, B) auf den Keller gelegt
- In z_1 werden sie dann wieder abgearbeitet (durch Lesen von a, b)
- Wechsel von z_0 zu z_1 mit einem Zeichen (für Palindrome $ua\overline{u}$, $ub\overline{u}$) oder mit ε (für Palindrome $u\overline{u}$).
- Richtiger Zeitpunkt des Wechsels: Macht der Nichtdeterminismus.

Akzeptanz durch Endzustände

Definition (PDA mit Endzuständen)

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat mit Endzuständen (PDA mit Endzuständen) ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet,
- Γ ist das (endliche) Kelleralphabet
- $\delta : Z \times ((\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ ist die Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand,
- $\# \in \Gamma$ ist das Startsymbol im Keller und
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Ein PDA mit Endzuständen akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, W) \text{ und } z \in E\}.$$

Äquivalenz: Akzeptanz durch Endzustände / leeren Keller

Lemma

Für jeden Kellerautomat mit Endzuständen M kann ein Kellerautomat M' (ohne Endzustände) konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt

Lemma

Für jeden Kellerautomat M kann ein Kellerautomat mit Endzuständen M' konstruiert werden, so dass $L(M) = L(M')$ gilt.

Satz

PDAs mit Endzuständen und PDAs ohne Endzustände (mit Akzeptanz durch leeren Keller) sind äquivalente Formalismen.

Beweise dazu sind im Skript

Äquivalenz: PDAs und CFLs

- Wir zeigen, dass PDAs genau die Typ 2-Sprachen erkennen.
- Beweis in zwei Teilen:
  1. Konstruktion eines PDA aus CFG in Greibach-NF
  2. Konstruktion einer CFG aus einem PDA

     (sogenannte Tripelkonstruktion)

     (PDA mit Einschränkung:
     max. 2 Kellersymbole pro Schritt erzeugen)

CFG $\to$ PDA

Ideen:

- CFG in Greibach-Normalform gegeben
- PDA simuliert Linksableitung $S \Rightarrow w$
- Da CFG in Greibach-NF, sieht eine Linksableitung nach i-Schritten immer so aus: $S \Rightarrow^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_j$.
- Start mit Eingabe w und S auf dem Keller
- Nach i Schritten, ist $a_1 \cdots a_i$ verarbeitet und $B_1 \cdots B_j$ auf dem Keller

CFG $\to$ PDA (2)

Satz

Jede kontextfreie Sprache wird durch einen Kellerautomaten erkannt.

Beweis:

- Sei L eine CFL und $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ in Greibach-NF.
- Sei $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA, sodass

$$\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \to aB_1 \cdots B_n) \in P\}$$

  und falls $\varepsilon \in L$ setze zusätzlich $\delta(z_0, \varepsilon, S) := \{(z_0, \varepsilon)\}$.
  In allen anderen Fällen sei $\delta(z_0, \varepsilon, A) = \emptyset$.
- Wir zeigen $L(M) = L$.
- Zunächst: $\varepsilon \in L$ g.d.w. $(z_0, \varepsilon, S) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$ und damit $\varepsilon \in L(M)$.

CFG $\to$ PDA (2)

$M = (\{z_0\}, \Sigma, \Sigma \cup V, \delta, z_0, S)$ mit $\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \to aB_1 \cdots B_n) \in P\}$ ...

Beweis (Fortsetzung):

- Für die weiteren Fälle zeigen wir für alle $i \in \mathbb{N}$ (mit Induktion über i)
  $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
  genau dann, wenn
  $(z_0, a_1 \cdots a_i w, S) \vdash^i (z_0, w, B_1 \cdots B_m)$ für alle $w \in \Sigma^*$.
- Basis $i = 0$: gilt, denn $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$
- Für $i > 0$ und " $\Rightarrow$":
  - Sei $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ eine Linksableitung.
  - Da G in Greibach-NF, kann diese geschrieben werden als $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$, wobei $B_x \to a_i B_1 \cdots B_j \in P$ als letzte Produktion angewendet wurde.
  - Induktionsannahme liefert: $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m$ genau dann, wenn $(z_0, a_1 \cdots a_{i-1} w, S) \vdash^{i-1} (z_0, w, B_x B_{j+1} \cdots B_k)$.
  - Verwende $w = a_i w'$ und da $(z_0, B_1 \cdots B_j) \in \delta(z_0, a_i, B_x)$, gilt $(z_0, a_1 \cdots a_i w', S) \vdash^i (z_0, w', B_1 \cdots B_k)$ für alle w'.

CFG $\to$ PDA (3)

$M = (\{z_0\}, \Sigma, \Sigma \cup V, \delta, z_0, S)$ mit $\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \to aB_1 \cdots B_n) \in P\}$ ...

Beweis (Fortsetzung):

- Für $i > 0$ und "$\Leftarrow$":
  - Sei $(z_0, a_1 \cdots a_i w, S) \vdash^i (z_0, w, B_1 \cdots B_k)$.
  - Dann muss der letzte Schritt a_i gelesen haben
  - D.h. die Folge lässt sich zerlegen in

$$(z_0, a_1 \cdots a_i w, S) \vdash^{i-1} (z_0, a_i w, B_x B_{j+1} \cdots B_k) \vdash (z_0, w, B_1 \cdots B_k),$$

    wobei $(z_0, B_1 \cdots B_j) \in \delta(z_0, a_i, B_x)$.
  - Dann muss $B_x \to aB_1 \cdots B_j$ eine Produktion in P sein.
  - Induktionsannahme liefert: $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_k$ und wir können obige Produktion anwenden und erhalten $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_k$. □

Hilfssatz für PDA → CFG-Beweis

Lemma (PDAs mit Erzeugung von ≤ 2 Kellersymbolen)

Für jeden PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ gibt es einen PDA $M' = (Z, \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, \#)$ mit $L(M) = L(M')$, sodass gilt: Wenn $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta'(z, a, A)$ (für $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$), dann ist $k \leq 2$.

Beweis (Skizze):
Transformiere M in M' wie folgt (mit $A \in \Gamma$ und $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$):

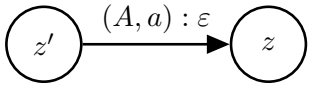
- $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta'(z, a, A)$ wenn $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$, $k \leq 2$.
- falls $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ mit $k > 2$, dann
  - $(z, C_k B_k) \in \delta'(z, a, A)$, und
  - $\delta(z, \varepsilon, C_i) = \{(z, C_{i-1} B_{i-1})\}$ für alle i mit $4 \leq i \leq k$, und
  - $\delta(z, \varepsilon, C_3) = \{(z', B_1 B_2)\}$

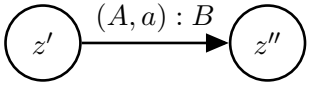
  wobei $C_3, \ldots, C_k \in \Gamma'$ neue Kellersymbole sind
  (diese werden jeweils neu erzeugt pro ersetztem Eintrag).

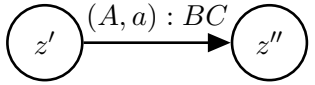
PDA → CFG

Ideen

- Verwende PDA mit Erzeugung von ≤ 2 Kellersymbolen
- Erzeuge Grammatik mit Tripelkonstruktion
- Variablen der Grammatik:
  Tripel $\langle z', A, z \rangle$, die alle Worte w erzeugt, die den PDA von z' mit Kellerinhalt A und Wort w zu z und leeren Keller führen
- Produktionen

$\langle z', A, z \rangle \to a$ wenn 

$\langle z', A, z \rangle \to a\langle z'', B, z \rangle$ wenn 

$\langle z', A, z \rangle \to a\langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle$ wenn 

PDA → CFG (2)

Satz

Kellerautomaten akzeptieren kontextfreie Sprachen.

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ein PDA mit $k \leq 2$ für alle $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ (und $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$).
Konstruiere $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit S neues Symbol und

$$
\begin{aligned}
V &= \{S\} \cup \{\langle z_i, A, z_j \rangle \mid z_i, z_j \in Z, A \in \Gamma\} \\
P &= \{S \to \langle z_0, \#, z \rangle \mid z \in Z\} \\
&\quad \cup \{\langle z', A, z \rangle \to a \mid (z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A), a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \\
&\quad \cup \{\langle z', A, z \rangle \to a\langle z'', B, z \rangle \mid (z'', B) \in \delta(z', a, A), z \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \\
&\quad \cup \{\langle z', A, z \rangle \to a\langle z'', B, z_1 \rangle \langle z_1, C, z \rangle \mid (z'', BC) \in \delta(z', a, A), \\
&\qquad\qquad z, z_1 \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\}
\end{aligned}
$$

Wir beweisen $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, A, z \rangle$ folgt: $w \in L(G) \iff w \in L(M)$, d. h. $L(G) = L(M)$.

PDA → CFG (3)

„⇒“:

- Sei $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung.
- Wir verwenden Induktion über i.
- Basis $i = 1$: Sei $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$
  - Verwendete Produktion muss $\langle z', A, z \rangle \to a$ sein
  - Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Schritt: $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$. mit $i - 1 > 0$
  - Wenn $u = a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$, dann kann $i - 1 > 0$ nicht gelten.
  - Wenn $u = a\langle z'', B, z \rangle$, dann $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$.
    Dann gilt $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} w'$ und die Induktionsannahme liefert $(z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Mit $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ zeigt dies $(z', u, A) = (z', aw', A) \vdash_M (z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

PDA → CFG (4)

...

- Wenn $u = a\langle z'', B, z_1\rangle\langle z_1, C, z\rangle$, dann ist $(z'', BC) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a\langle z'', B, z_1\rangle\langle z_1, C, z\rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$

  Dann gilt auch $\langle z'', B, z_1\rangle\langle z_1, C, z\rangle \Rightarrow^{i-1} w'$ und es gibt Linksableitungen $\langle z'', B, z_1\rangle \Rightarrow^{j} w'_0$ und $\langle z_1, C, z\rangle \Rightarrow^{k} w'_1$ mit $j + l \leq i - 1$, $w' = w'_0 w'_1$.

  Für beide können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten $(z'', w'_0, B) \vdash^*_M (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$ und $(z_1, w'_1, C) \vdash^*_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

  Abändern der 1. Konfigurationsfolge: C auf den Keller & w'_1 anhängen $(z'', w', BC) = (z'', w'_0 w'_1, BC) \vdash^*_M (z_1, w'_1, C)$.

  Anhängen der 2. Konfigurationsfolge liefert: $(z'', w', BC) \vdash^*_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

  Da $(z'', BC) \in \delta(z', a, A)$, gilt

$$(z', u, BC) = (z', aw', BC) \vdash_M (z'', w', BC) \vdash^*_M (z, \varepsilon, \varepsilon).$$

PDA → CFG (5)

„⇐“:

- Sei $(z', w, A) \vdash^i_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Zeige $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow^*_G w$ mit Induktion über i
- Basis $i = 1$: Dann gilt $w = a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', w, A)$. Damit gibt es $\langle z', A, z\rangle \to a \in P$ und daher $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a$.
- Schritt: Sei $i > 1$ und daher $(z', aw', A) \vdash (z'', w', \alpha) \vdash^{i-1}_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für $i - 1 > 0$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $\alpha = \varepsilon$, $\alpha = B$ oder $\alpha = BC$.
  Wir betrachten alle drei Fälle für α einzeln:
  - $\alpha = \varepsilon$: Dieser Fall ist nicht möglich, da $i - 1 > 0$ nicht gelten kann.
  - $\alpha = B$. Dann ist $\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z\rangle \in P$.
    Da $(z'', w', B) \vdash^{i-1}_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$, liefert Induktionsannahme $\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^*_G w'$ und daher: $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^*_G aw' = w$.

PDA → CFG (6)

...

- $\alpha = BC$. Dann ist $\langle z', A, z\rangle \to \langle z'', B, z_1\rangle\langle z_1, C, z\rangle \in P$.

  Schreibe $(z'', w', BC) \vdash^{i-1}_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$ als $(z'', w'_1 w'_2, BC) \vdash^{j}_M (z_1, w'_2, C) \vdash^{k}_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$ mit $j + k = i - 1$.

  Weglassen von C und w'_2 im ersten Teil zeigt: $(z'', w'_1, B) \vdash^{j}_M (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$,

  Da $j < i$ und $k < i$ liefert Induktionsannahme $\langle z'', B, z_1\rangle \Rightarrow^*_G w'_1$ und $\langle z_1, C, z\rangle \Rightarrow^*_G w'_2$.

  Daher gilt

  $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a\langle z'', B, z_1\rangle\langle z_1, C, z\rangle \Rightarrow^*_G aw'_1\langle z_1, C, z\rangle \Rightarrow^*_G aw'_1 w'_2 = w.$

Geschafft...

Die gezeigten Sätze zusammengefasst ergeben:

Theorem

Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

Bemerkung

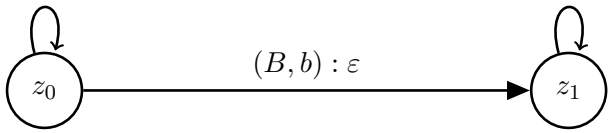
Die bisherigen Beweise zeigen auch, dass man PDAs einschränken kann auf PDAs mit genau einem Zustand:

- Sei M ein PDA.
- Transformiere M in Grammatik G mit $L(G) = L(M)$
- Transformiere G in G' in Greibach-Normalform (mit $L(G') = L(G) \setminus \varepsilon$)
- Transformiere Grammatik G' in PDA M' mit $L(M') = L(G)$

  unsere Konstruktion verwendet nur einen Zustand!

Beispiel

$(\#, a) : B\#, \quad (\#, \varepsilon) : \varepsilon, \quad (B, a) : BB \qquad (B, b) : \varepsilon, \quad (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



Der vorherige Beweis konstruiert die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}\\
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle.\}\\
&\cup \{\langle z_0, B, z_1\rangle \to b, \langle z_1, B, z_1\rangle \to b, \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon, \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
&\cup \{\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\}\\
&\cup \{\langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

Beispiel (2)

Vereinfachen der Grammatik ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\{S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle \mid \langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to b \mid a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b\}
\end{aligned}
$$

Umbenennen, Streichen von nicht erreichbaren Variablen und Entfernen von Einheitsproduktionen ergibt

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon \mid aB, B \to b \mid aBC, C \to b\}, S)$$

(ist bis auf ε-Produktion in Greibach-NF.)

Beispiel (3)

Der vorherige Beweis konstruiert für

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon \mid aB, B \to b \mid aBC, C \to b\}, S)$$

den PDA $M = (\{z_0\}, \Sigma, \Sigma \cup V, \delta, z_0, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
&\delta(z_0, a, S) = \{(z_0, B)\} \quad \delta(z_0, b, B) = \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, a, B) = \{(z_0, BC)\}\\
&\delta(z_0, b, C) = \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, \varepsilon, S) = \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, d, A) = \emptyset \text{ sonst}
\end{aligned}
$$

Eine Konfigurationsfolge für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$
\begin{aligned}
&(z_0, aaabbb, S)\\
&\vdash (z_0, aabbb, B)\\
&\vdash (z_0, abbb, BC)\\
&\vdash (z_0, bbb, BCC)\\
&\vdash (z_0, bb, CC)\\
&\vdash (z_0, b, C)\\
&\vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Deterministisch kontextfreie Sprachen

- Definiert durch deterministische Kellerautomaten mit **Akzeptanz durch Endzustände**.
- ε-Übergänge sind erlaubt, aber nur wenn es keinen anderen Übergang (mit einem Terminalzeichen und selben Kellersymbol) gibt.

Definition (Deterministischer Kellerautomat, DPDA)

Ein Kellerautomat mit Endzuständen $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ist deterministisch (ein DPDA) wenn für alle $(z, a, A) \in (Z, \Sigma, \Gamma)$ gilt:

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1.$$

Die von DPDAs akzeptierten Sprachen heißen deterministisch kontextfrei.

Beispiele (1)

Satz

Die Sprache $L = \{w\$\overline{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{ll}
\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, A\#)\} & \delta(z_0, \$, A) = \{(z_1, A)\} \\
\delta(z_0, b, \#) = \{(z_0, B\#)\} & \delta(z_0, \$, B) = \{(z_1, B)\} \\
\delta(z_0, a, A) = \{(z_0, AA)\} & \delta(z_0, \$, \#) = \{(z_1, \#)\} \\
\delta(z_0, b, A) = \{(z_0, BA)\} & \delta(z_1, a, A) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, a, B) = \{(z_0, AB)\} & \delta(z_1, b, B) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, b, B) = \{(z_0, BB)\} & \delta(z_1, \varepsilon, \#) = \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ sonst

Beachte: $L = \{w\overline{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist nicht deterministisch kontextfrei aber kontextfrei

Beispiele (2)

Satz

Die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA
$M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{\#, A\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{l}
\delta(z_0, a, \#) = \{(z_0, A\#)\} \\
\delta(z_0, a, A) = \{(z_0, AA)\} \\
\delta(z_0, b, A) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_1, b, A) = \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_1, \varepsilon, \#) = \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{array}$$

und $\delta(z_i, c, B) = \emptyset$, sonst

Eigenschaften von deterministisch kontextfreien Sprachen

Theorem (Eigenschaften determin. kontextfreier Sprachen)

1. Das Wortproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen kann in Linearzeit entschieden werden.
2. Für deterministisch kontextfreie Sprachen gibt es eindeutige Grammatiken.
3. Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis: siehe Literatur

Weitere Eigenschaften

Satz

Deterministisch kontextfreie Sprachen sind nicht abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis: i) Schnittbildung:

- Die Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ sind deterministisch kontextfrei
- $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht kontextfrei.

ii) Vereinigung:

- $L \cap L' = \overline{\overline{L} \cup \overline{L'}}$
- Annahme: Det. CFLs abgeschlossen bez. Vereinigung
- Da Det. CFLs auch abgeschlossen bez. Komplement, folgt: Det. CLFs abgeschlossen bez. Schnitt. Widerspruch!
- D.h. Annahme falsch, Det. CFLs nicht abgeschlossen bez. $\cup$.

Weitere Eigenschaften (2)

Satz

Der Schnitt einer (deterministisch) kontextfreien Sprachen mit einer regulären Sprache ist (deterministisch) kontextfrei.

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA mit Endzuständen und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein DFA. Konstruiere PDA mit Endzuständen: $M'' = (Z \times Z', \Sigma, \delta'', (z_0, z_0'), \#, E \times E')$ mit

- $(z_k, z_k', B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), a, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, a, A)$ und $\delta'(z_i', a) = z_k'$ und
- $(z_k, z_i', B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), \varepsilon, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, \varepsilon, A)$.

Es gilt:

- $L(M'') = L(M) \cap L(M')$, denn M'' simuliert M und M' gleichzeitig, und akzeptiert nur, wenn beide Automaten akzeptieren.
- M'' ist deterministisch, wenn M deterministisch ist.

Entscheidbarkeitsfragen für CFLs

- CYK-Algorithmus zeigt: Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.
- Viele Fragestellungen sind für CFLs unentscheidbar (z.B. das Äquivalenzproblem und das Schnittproblem)
- Wir betrachten weitere Entscheidungsprobleme

Leerheitsproblem

Satz

Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist entscheidbar.

Beweis:

- Sei L als CFG gegeben
- Prüfe zunächst, ob $\varepsilon \in L$ (wenn ja, dann ist L nicht leer)
- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-NF mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$.
- Der folgende Algorithmus markiert alle $A \in V$ mit $\{w \in \Sigma^* \mid A \Rightarrow_G^* w\} \neq \emptyset$
- Prüfe, ob S markiert wird (wenn ja, dann ist L nicht-leer)

Algorithmus 9: Markierung der Variablen, die nichtleere Sprachen erzeugen

Eingabe: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform
Ausgabe: Menge $W \subseteq V$ aller Variablen, die nicht die leere Sprache erzeugen
Beginn
  $W := \{A \in V \mid A \to a \in P, a \in \Sigma\}$;
  wiederhole
    $W_{alt} := W$;
    $W := W_{alt} \cup \{A \mid A \to BC \in P, B \in W_{alt}, C \in W_{alt}\}$;
  bis $W = W_{alt}$;
  return W

Endlichkeitsproblem

Satz
Das Endlichkeitsproblem für kontextfreie Sprachen ist entscheidbar.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-NF. Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma für CFGs (z.B. $n = 2^{|V|}$ siehe Beweis Pumping-L.).

Wir zeigen zunächst: Es gilt $|L(G)| = \infty$ g.d.w. es ein Wort $z \in L(G)$ mit $n \leq |z| < 2n$ gibt:

„$\Leftarrow$“:

- Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- Pumping-Lemma zeigt: $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Also $L(G)| = \infty$

Endlichkeitsproblem (2)

...

Wir zeigen zunächst: Es gilt $|L(G)| = \infty$ g.d.w. es ein Wort $z \in L(G)$ mit $n \leq |z| < 2n$ gibt:

„$\Rightarrow$“:

- Beweis durch Widerspruch
- Annahme: Es gibt kein Wort $z \in L(G)$ für $n \leq |z| < 2n$, aber trotzdem gilt $|L(G)| = \infty$.
- Sei $z \in L(G)$ das kürzeste Wort mit $|z| \geq 2n$.
- Pumping-Lemma: Es gibt u, v, w, x, y gibt mit $z = uvwxy$, $|vx| > 0$ und $|vwx| \leq n$, sodass insbes. $uv^0wx^0y \in L$ gilt.
- Da $|uv^0wx^0y| = |uwy| < |uvwxy|$ und $|uwy| \geq n$ gilt, war z nicht minimal gewählt. Widerspruch!

Entscheide Endlichkeitsproblem: Teste für alle Worte $w \in \Sigma^*$, der Länge $n \leq |w| < 2n$, ob $w \in L(G)$ gilt (mit CYK-Algorithmus).

Weiteres Entscheidbarkeitsproblem

Das Problem, ob eine deterministisch kontextfreie Sprache äquivalent zu einer regulären Sprache ist, ist entscheidbar.

- Sei L_1 durch DPDA gegeben und L_2 durch einen DFA.
- Prüfe $\overline{L_1} \cap L_2 = \emptyset$ und $L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$
- Beides ist entscheidbar, da DPDAs und DFAs abgeschlossen unter Komplementbildung, Schnittbildung zwischen DPDA und DFA durch DPDA konstruierbar ist und Leerheitsproblem für CFLs entscheidbar ist
- $\overline{L_i} \cap L_j = \emptyset$ impliziert $L_i \subseteq L_j$
- Daher ist $\bigwedge_{(i,j)\in\{(1,2),(2,1)\}} \overline{L_i} \cap L_j = \emptyset$ äquivalent zu $L_1 = L_2$.

Zusammenfassung

- CYK-Algorithmus: $w \in L(G)$ in $\mathcal{O}(n^3)$ für CFGs G in Chomsky-NF entscheiden.
- Kellerautomaten erkennen genau die CFLs
- Deterministisch kontextfreie Sprachen (DPDAs)
- Entscheidbarkeitsresultate für kontextfreie Sprachen