LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2019

Reguläre Sprachen: Formalismen

Prof. Dr. David Sabel

LFE Theoretische Informatik

Letzte Änderung der Folien: 4. Juni 2019

Reguläre Sprachen

Wiederholung:

- Eine Sprache heißt **regulär** (bzw. vom Typ 3), wenn sie von einer Typ 3-Grammatik erzeugt wird.
- Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 3 (bzw. regulär), wenn alle Produktionen von der Form

$$A \to a \text{ oder } A \to aB$$

mit $A, B \in V$ und $a \in \Sigma$ sind.

Inhaltsübersicht

- Deterministische endliche Automaten
- Nichtdeterministische endliche Automaten
- Reguläre Ausdrücke
- Äquivalenz der Formalismen

Deterministische endliche Automaten

Die informelle Kurzfassung:

- Endliche Automaten lesen Zeichenweise ein Eingabewort
- Wechseln dabei den Zustand (eindeutig)
- Nur endlich viele Zustände
- Starten im Startzustand
- Nach Lesen der Eingabe: Akzeptieren oder Verwerfen
- Akzeptieren = in einem Endzustand
- Verwerfen = in keinem Endzustand
- Akzeptierte Sprache = alle Worte, für die der Automat akzeptiert

DFA: Definition

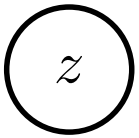
Definition (Deterministischer Endlicher Automat, DFA)

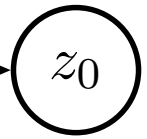
Ein deterministischer endlicher Automat (determinististic finite automaton, DFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ wobei

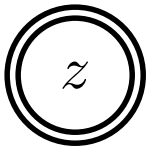
- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $(Z \cap \Sigma) = \emptyset$,
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand,
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände (oder auch akzeptierende Zustände) und
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ ist die Zustandsüberführungsfunktion (oder nur Überführungsfunktion).

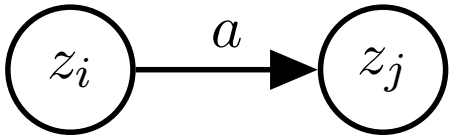
Zustandsgraph eines DFA

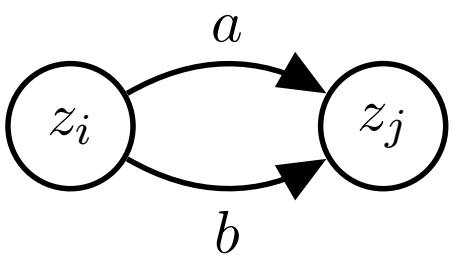
Für DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

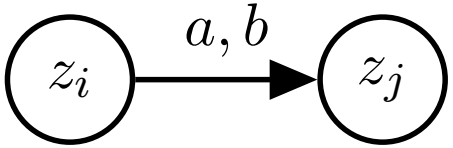
- Für $z \in Z$ gibt es Knoten 

- Startzustand $z_0 \in Z$: eingehender Pfeil 

,
- Endzustände $z \in E$: doppelte Kreise 

,
- Übergänge $\delta(z_i, a) = z_j$ als Kante 

und statt 

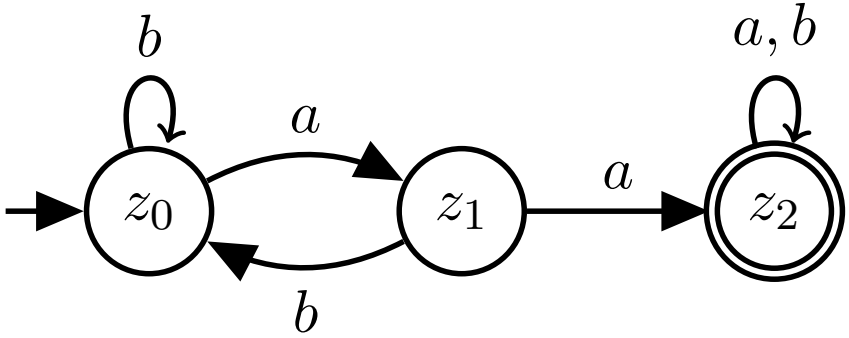
zeichnen wir 

.

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

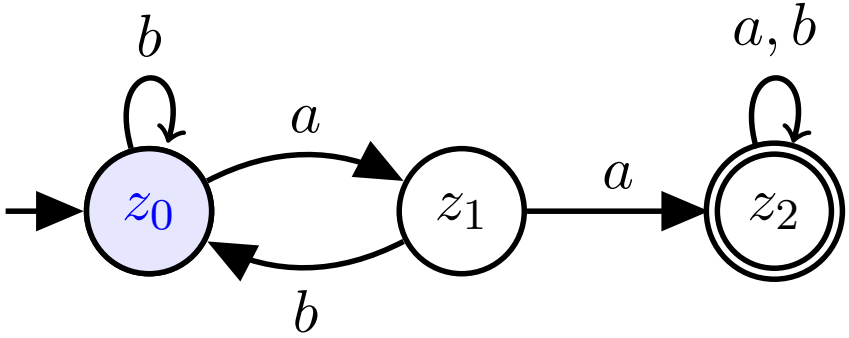
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

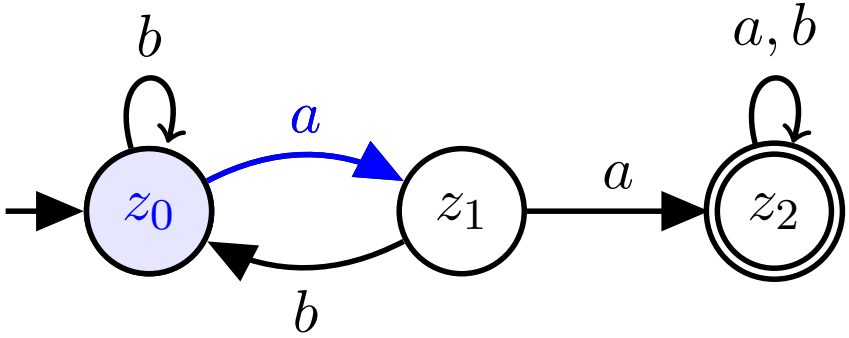
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

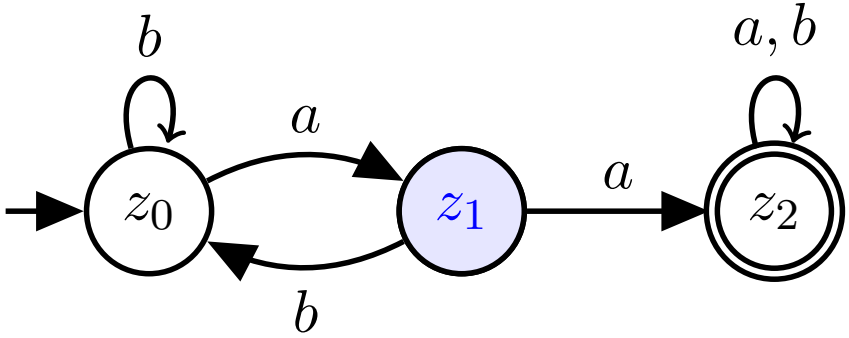
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

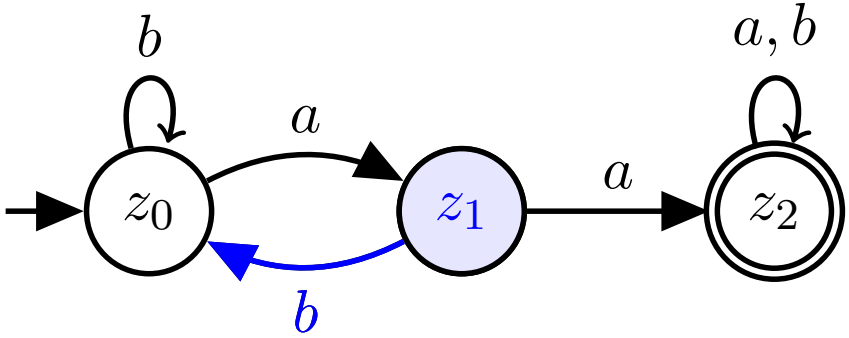
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

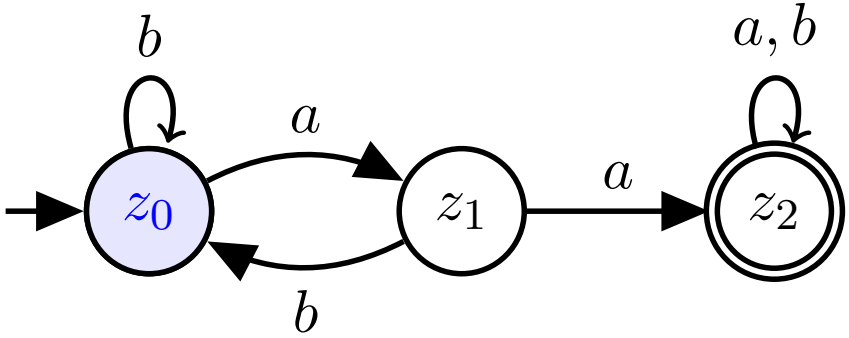
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

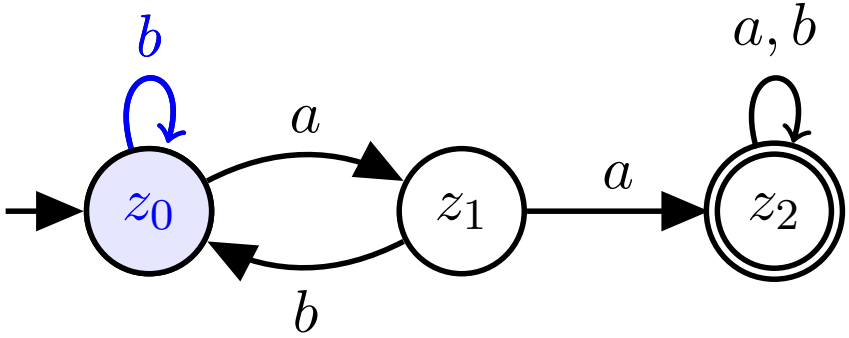
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

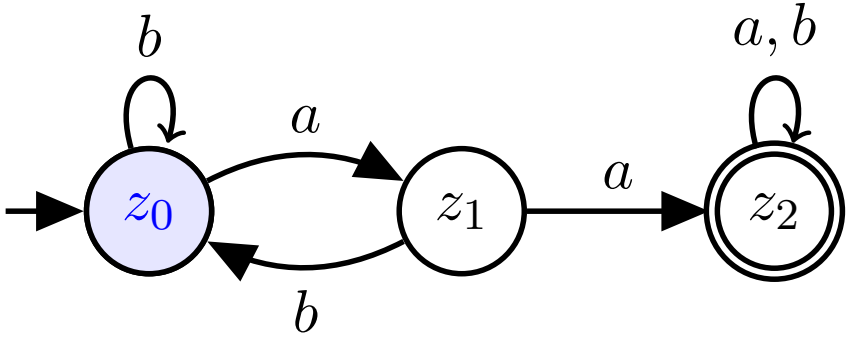
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

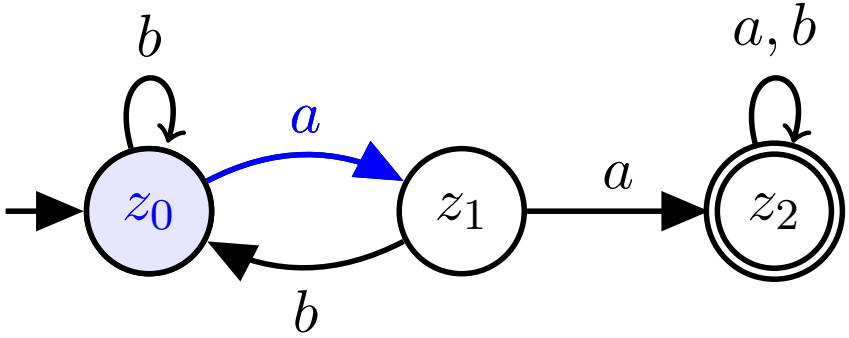
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

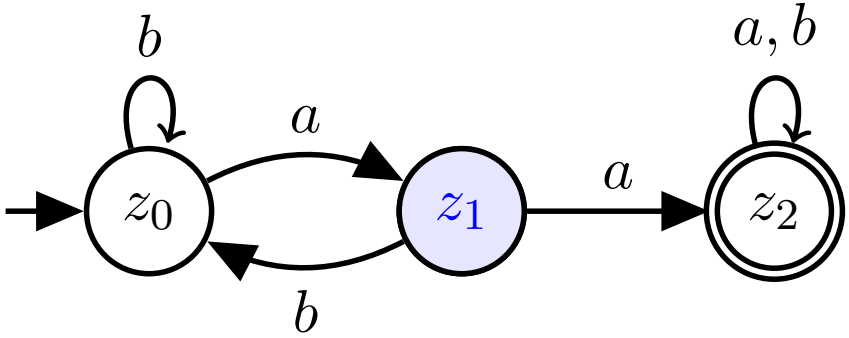
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

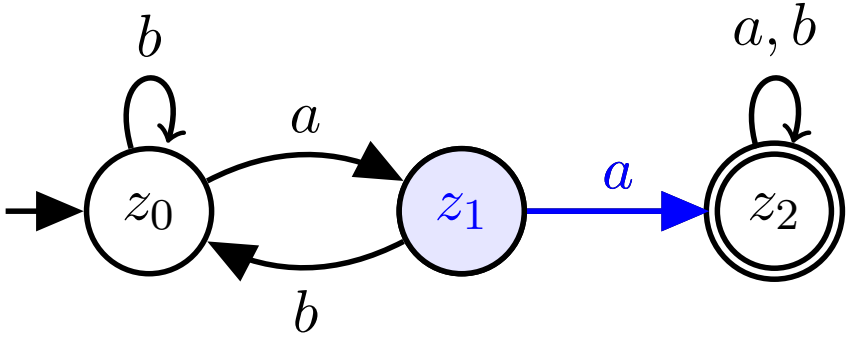
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

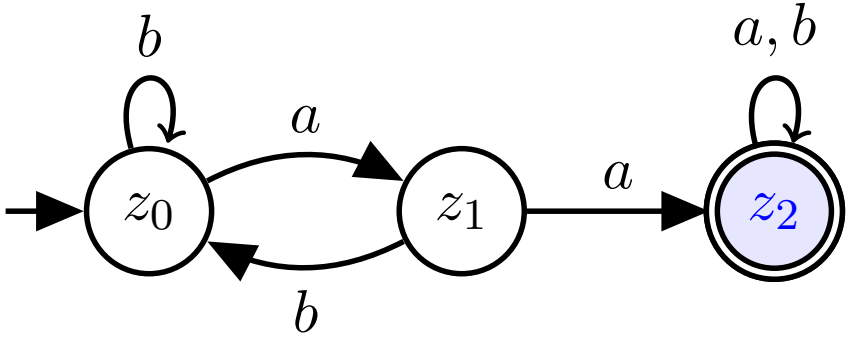
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

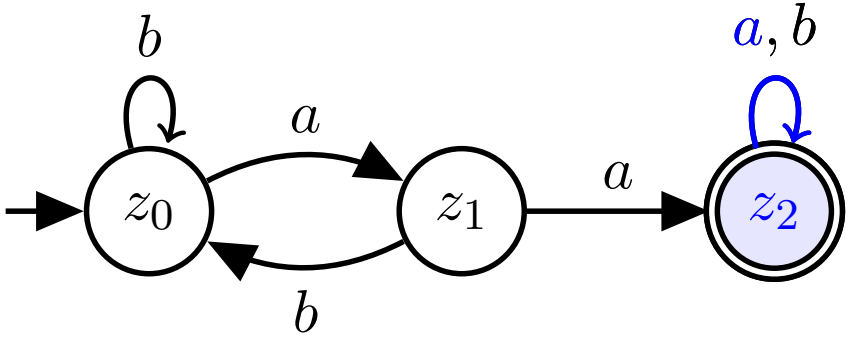
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa\mathbf{a}$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

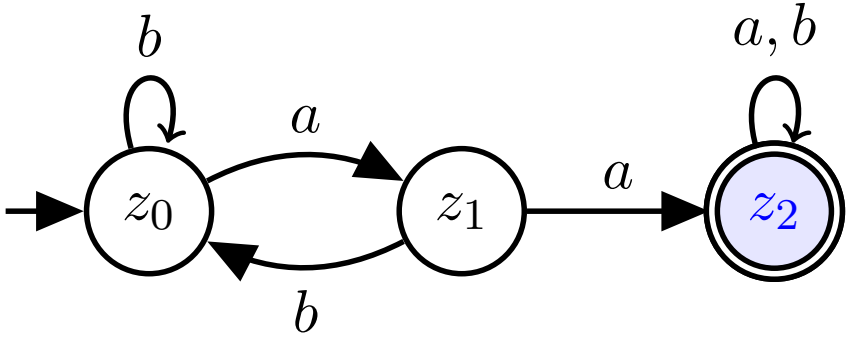
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa\underline{a}$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

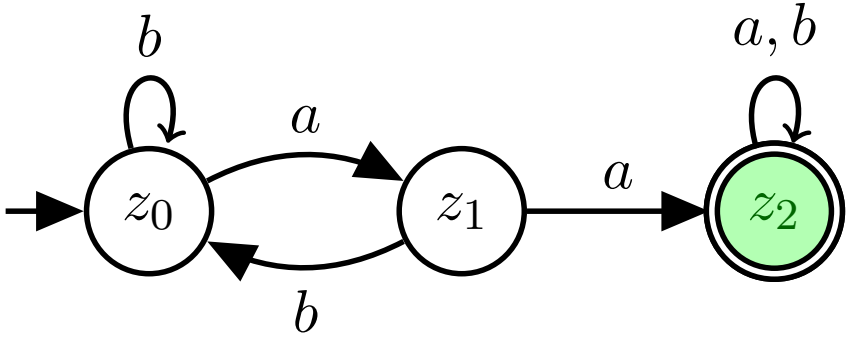
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

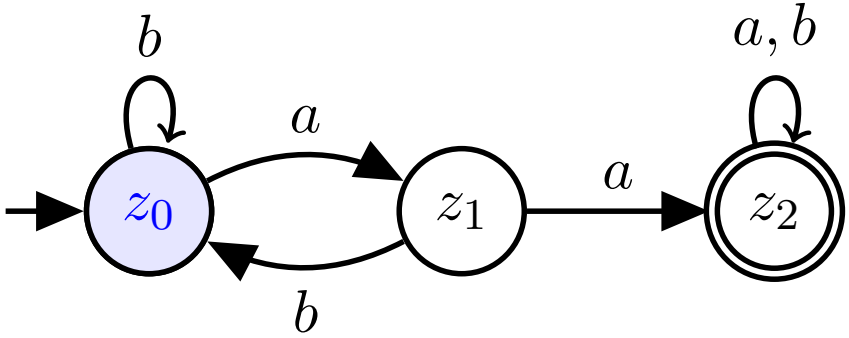
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

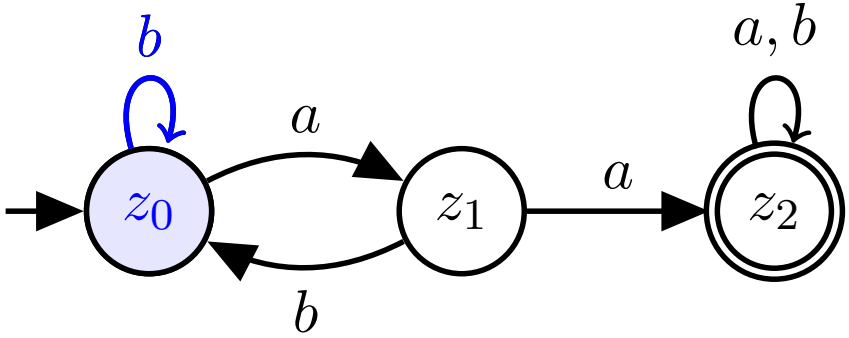
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

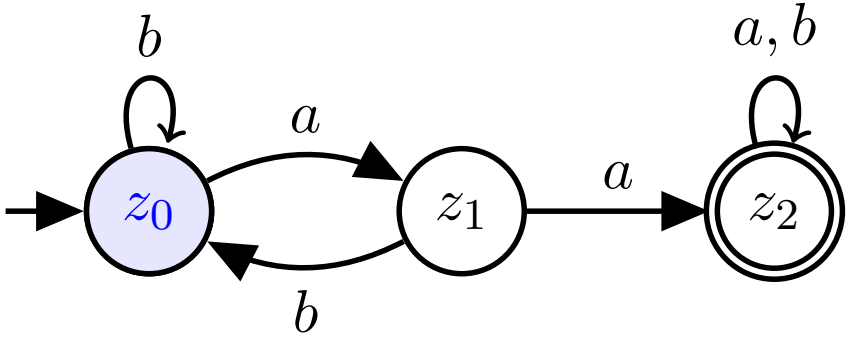
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

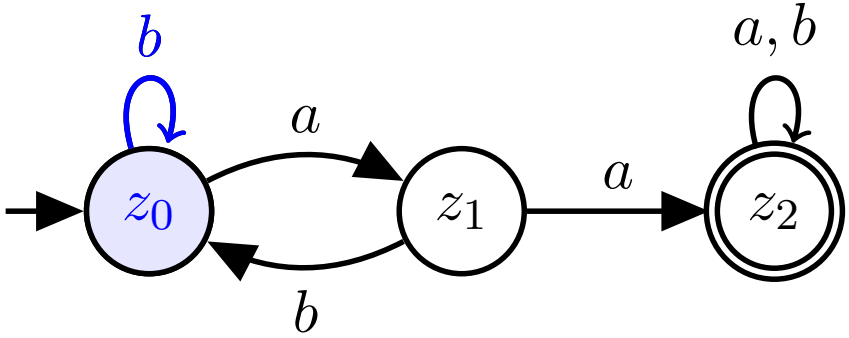
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

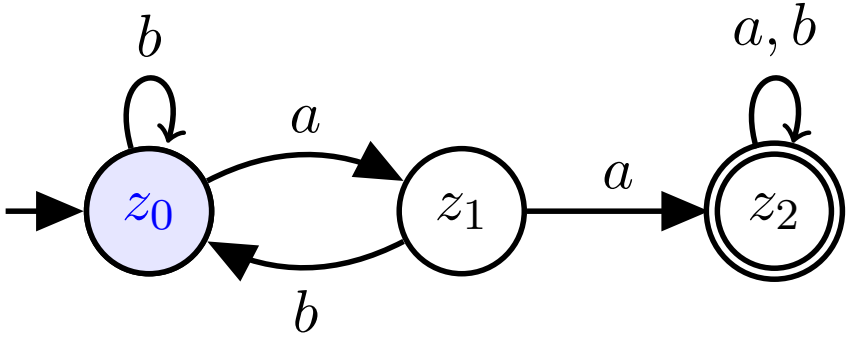
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

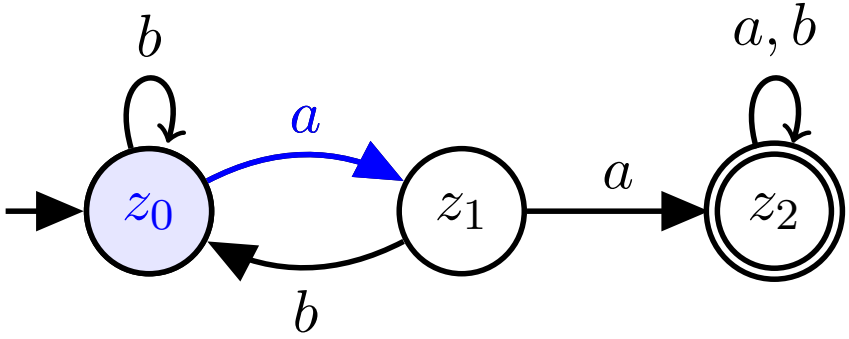
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

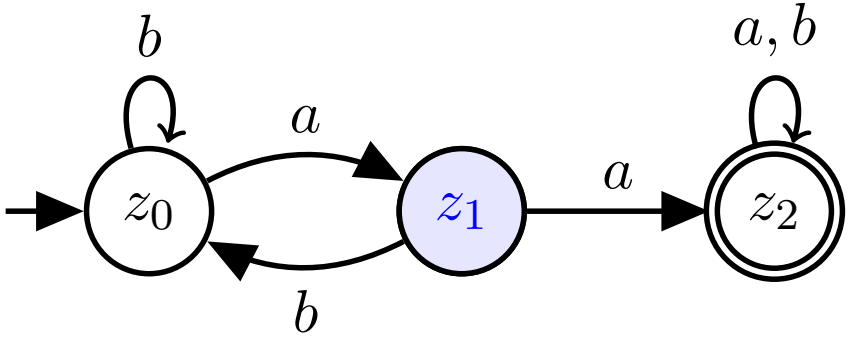
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

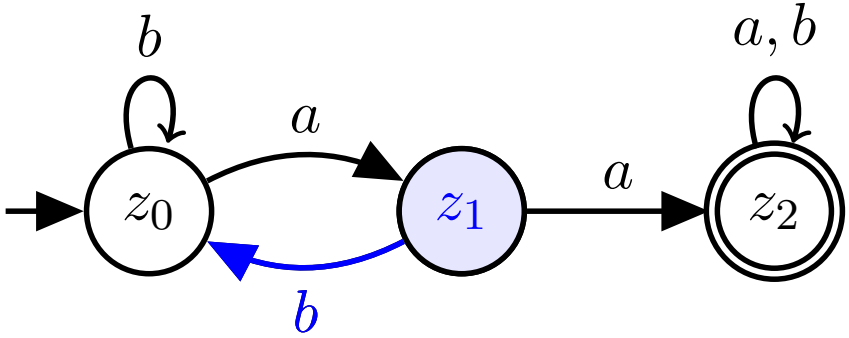
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

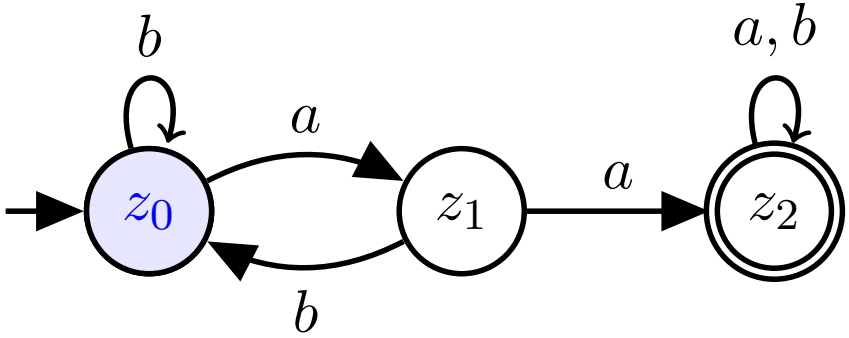
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

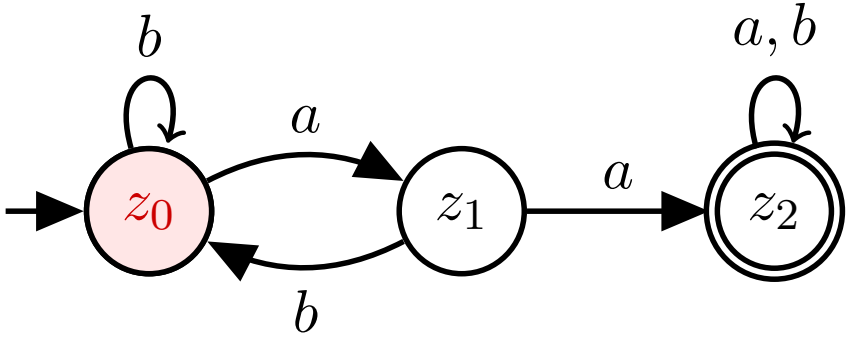
Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Abarbeitung von $abbaaa$:

- Starte in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese a und wechsle in z_2
- Lese a und wechsle in z_2
- Akzeptiere

Abarbeitung von $bbab$:

- Starte in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese b und wechsle in z_0
- Lese a und wechsle in z_1
- Lese b und wechsle in z_0
- Verwerfe

Akzeptierte Spraches eines DFA

Definition (Akzeptierte Sprache eines DFA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir definieren die Funktion $\widehat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$ durch

$$\widehat{\delta}(z, \varepsilon) := z \quad \text{und} \quad \widehat{\delta}(z, aw) := \widehat{\delta}(\delta(z, a), w)$$

Die von M **akzeptierte Sprache** ist

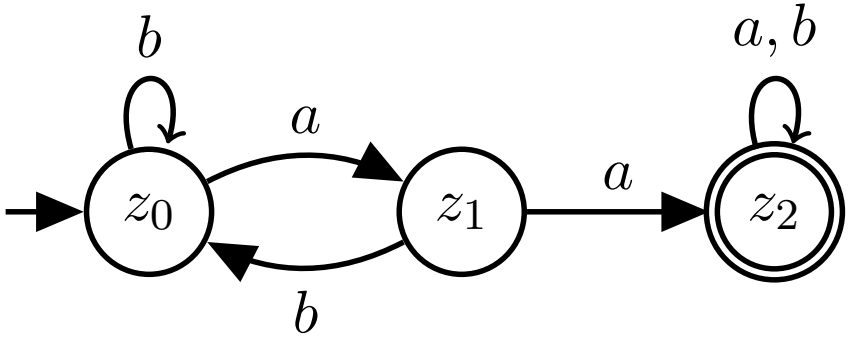
$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(z_0, w) \in E\}.$$

$\widehat{\delta}$ wendet δ solange an, bis das Eingabewort abgearbeitet ist

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$

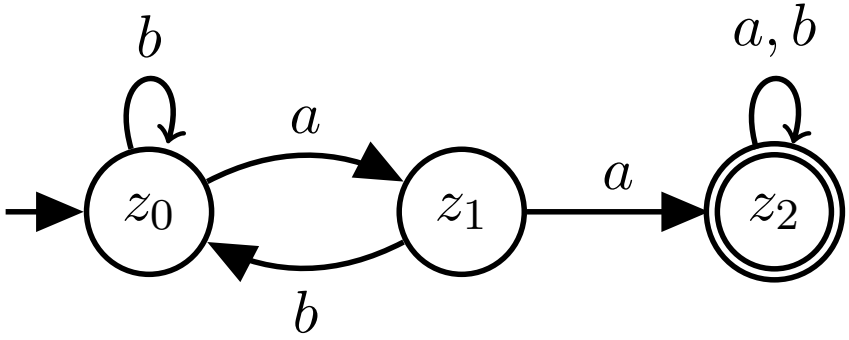


$$L(M) = \textbf{?}$$

Beispiel

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



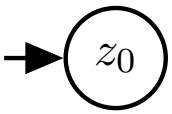
$$L(M) = \{uaav \mid uv \in \{a, b\}^*\}$$

Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:

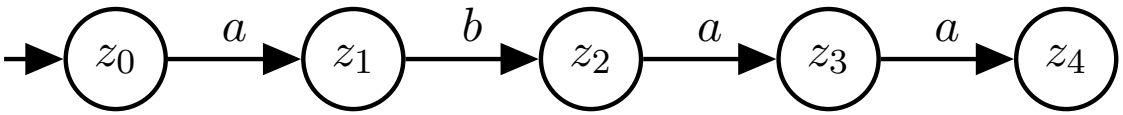
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



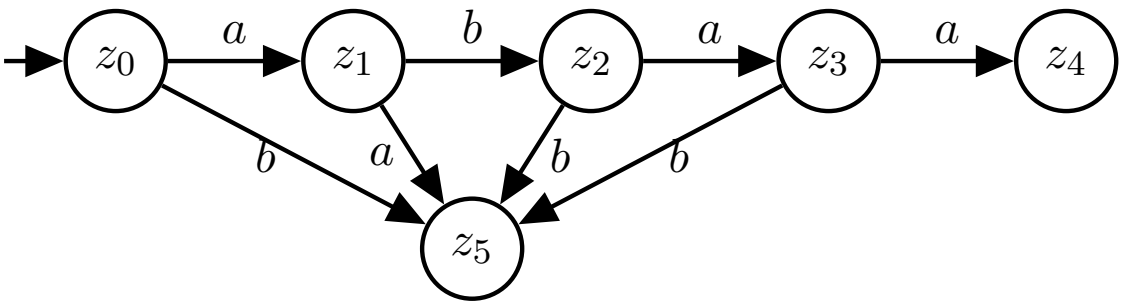
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



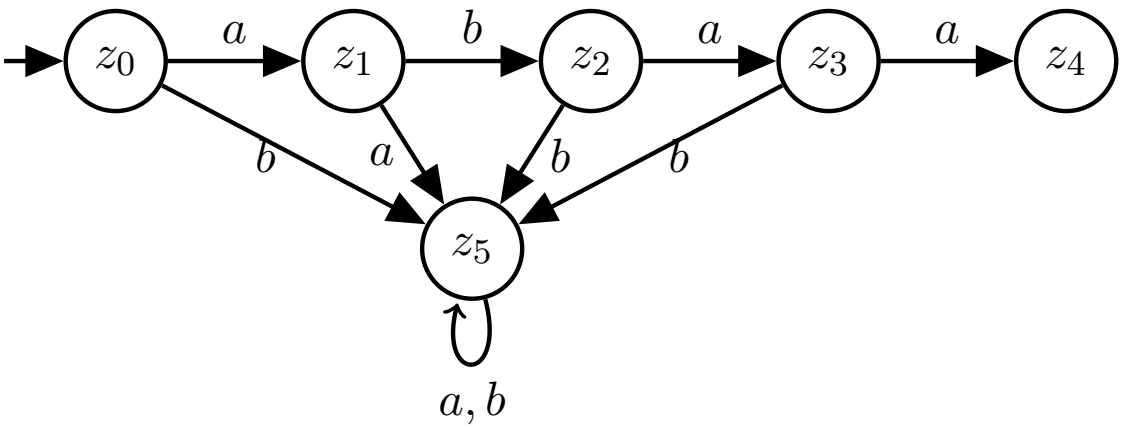
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



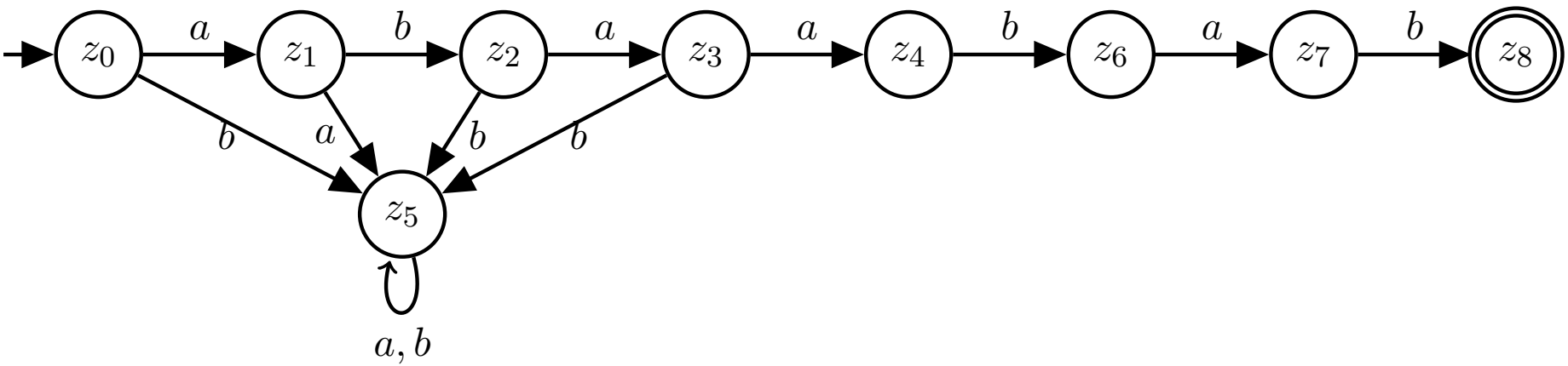
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



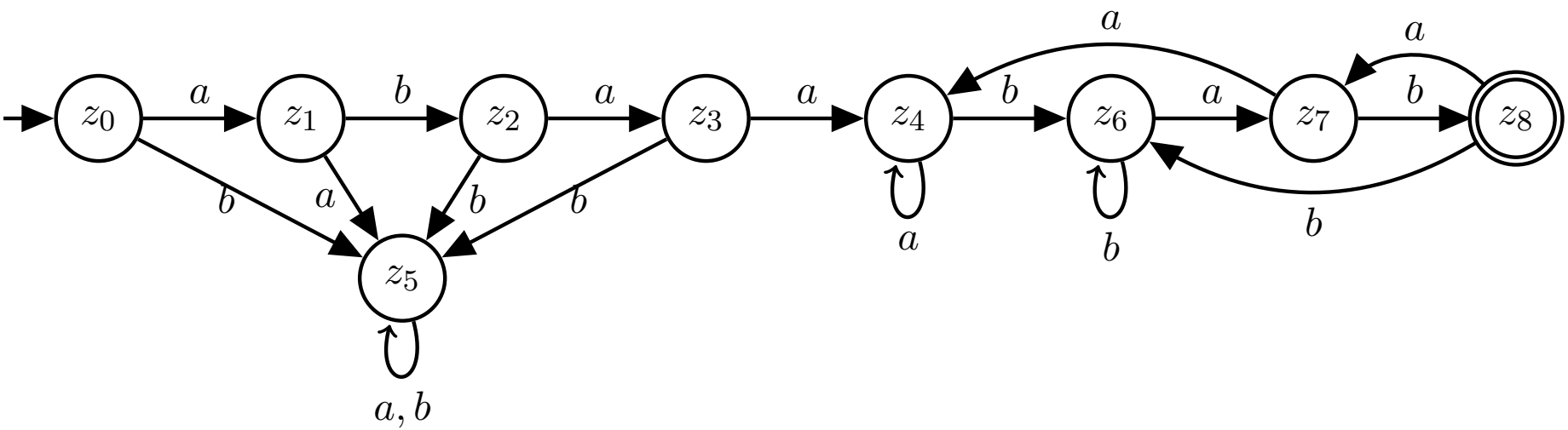
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



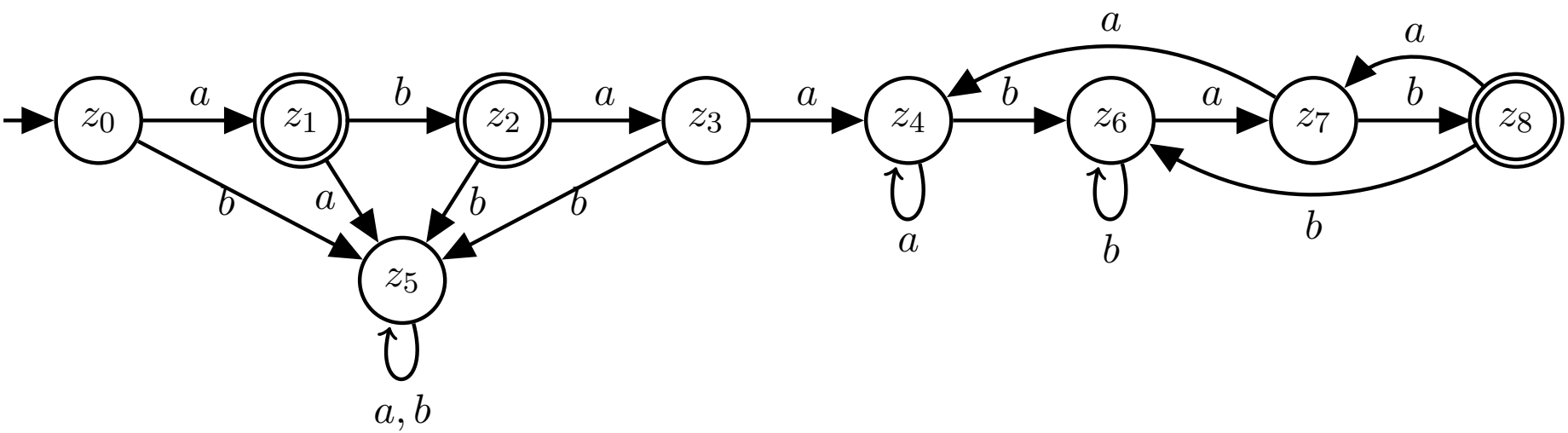
Beispiel: DFA konstruieren

Konstruiere DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ der alle Worte akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden:



Beispiel: DFA konstruieren (2)

Zusätzlich die Wörter a und ab akzeptieren



Lauf

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$.
Die Folge von Zuständen $q_0, \ldots, q_n$ mit $q_0 = z_0$ und
$q_i = \delta(q_{i-1}, w[i])$ bezeichnet man als **Lauf** von M für Wort w.

Für eine solchen Lauf schreiben wir auch:

$$q_0 \xrightarrow{w[1]} q_1 \xrightarrow{w[2]} \cdots \xrightarrow{w[n-1]} q_{n-1} \xrightarrow{w[n]} q_n$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

Offensichtlich $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

Offensichtlich $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$. Ansonsten:

$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

Offensichtlich $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$. Ansonsten:

$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$.

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

Offensichtlich $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$. Ansonsten:

$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$.

g.d.w. $z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1$, für $1 \leq i < m$: $a_1 \cdots a_{i-1} z_{i-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i z_i$ und $a_1 \cdots a_{m-1} z_{m-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_m$, d.h. $z_0 \Rightarrow_G^* a_1 \cdots a_m$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

Offensichtlich $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$. Ansonsten:

$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$.

g.d.w. $z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1$, für $1 \leq i < m$: $a_1 \cdots a_{i-1} z_{i-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i z_i$ und $a_1 \cdots a_{m-1} z_{m-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_m$, d.h. $z_0 \Rightarrow_G^* a_1 \cdots a_m$

g.d.w. $w = a_1 \cdots a_m \in L(G)$

DFAs akzeptieren reguläre Sprachen

Theorem 4.2.1

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.

Beweis: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die reguläre Grammatik mit

$$\begin{aligned} V = Z, \quad S = z_0, \quad P = & \quad \{z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \\ & \cup \quad \{z_i \to a \mid \delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E\} \\ & \cup \quad \{z_0 \to \varepsilon \mid \text{falls } z_0 \in E\} \end{aligned}$$

Offensichtlich $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$. Ansonsten:

$w = a_1 \cdots a_m \in L(M)$

g.d.w. es gibt $z_1, \ldots, z_m \in Z$ mit $\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$ und $z_m \in E$.

g.d.w. $z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1$, für $1 \leq i < m$: $a_1 \cdots a_{i-1} z_{i-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i z_i$ und $a_1 \cdots a_{m-1} z_{m-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_m$, d.h. $z_0 \Rightarrow_G^* a_1 \cdots a_m$

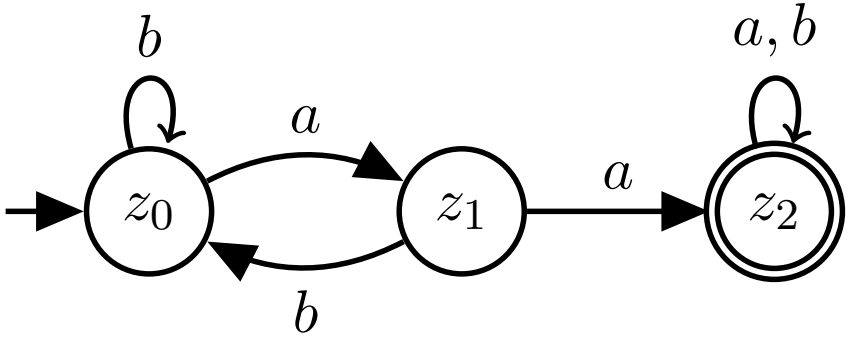
g.d.w. $w = a_1 \cdots a_m \in L(G)$

Daher gilt $L(M) = L(G)$ und somit ist $L(M)$ regulär. □

Beispiel: Konstruktion Typ 3-Grammatik aus DFA

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a) &= z_1 & \delta(z_1, b) &= z_0 \\ \delta(z_0, b) &= z_0 & \delta(z_2, a) &= z_2 \\ \delta(z_1, a) &= z_2 & \delta(z_2, b) &= z_2 \end{aligned}$$



Die erzeugte reguläre Grammatik dazu ist:

$$\begin{aligned} G &= (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, P, z_0) \text{ mit} \\ P &= \{z_0 \to az_1 \mid bz_0, \\ &\qquad z_1 \to az_2 \mid a \mid bz_0, \\ &\qquad z_2 \to az_2 \mid a \mid bz_2 \mid b\} \end{aligned}$$

Wird jede reguläre Sprache durch einen DFA akzeptiert?

- Der vorherige Beweis konstruiert:
  „für jeden DFA gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik“
- Für die andere Richtung wäre notwendig
  „für jede reguläre Grammatik gibt es einen äquivalenten DFA“

Problem:

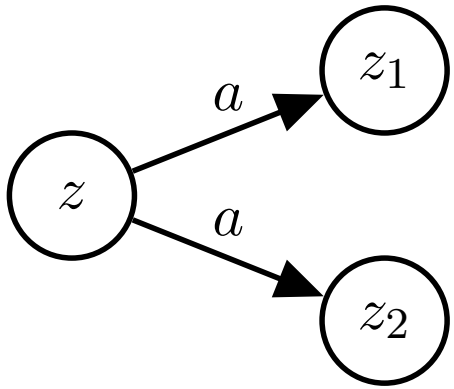
- Produktionen: $A \to aA_1$ und $A \to aA_2$ können in Grammatiken vorkommen
- Konstruktion des determinstischen Automaten unklar.

Daher: Beweis, dass DFAs alle regulären Sprachen akzeptieren, erfolgt auf Umwegen

Nichtdeterministische Endliche Automaten

Ideen

- Zustandswechsel nicht eindeutig, sondern nichtdeterministisch in einen von mehreren möglichen
- D.h. der Automat darf sozusagen „raten“ welchen Nachfolgezustand er wählt
- Im Zustandsgraph erlaubt:



- Technisch:
  - DFA $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ und ein Startzustand
  - NFA $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ und Menge von Startzuständen

Definition NFA

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (nondeterministic finite automaton, NFA) ist ein 5-Tupel $(Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $(Z \cap \Sigma) = \emptyset$,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände,
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände und
- $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion

Akzeptanz beim NFA

„Ein Wort w wird vom NFA akzeptiert, wenn es einen Pfad von einem Startzustand zum Endzustand entlang w gibt“

Definition (Akzeptierte Sprache eines NFA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.
Wir definieren $\widehat{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(Z)$ induktiv durch:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \text{ für alle } X \subseteq Z \\ \widehat{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widehat{\delta}(\delta(z, a), w) \text{ für alle } X \subseteq Z \end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset\}$$

Beispiel: Leere Menge von Startzuständen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \emptyset, E)$ ein NFA.
Dann ist $L(M) = ?$.

Beispiel: Leere Menge von Startzuständen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \emptyset, E)$ ein NFA.
Dann ist $L(M) = \emptyset$.

Lauf beim NFA

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA und $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$.
Eine Folge von Zuständen $q_0, \ldots, q_n$ mit $q_0 \in S$ und
$q_i \in \delta(q_{i-1}, w[i])$ bezeichnet man als **Lauf** von M für Wort w.

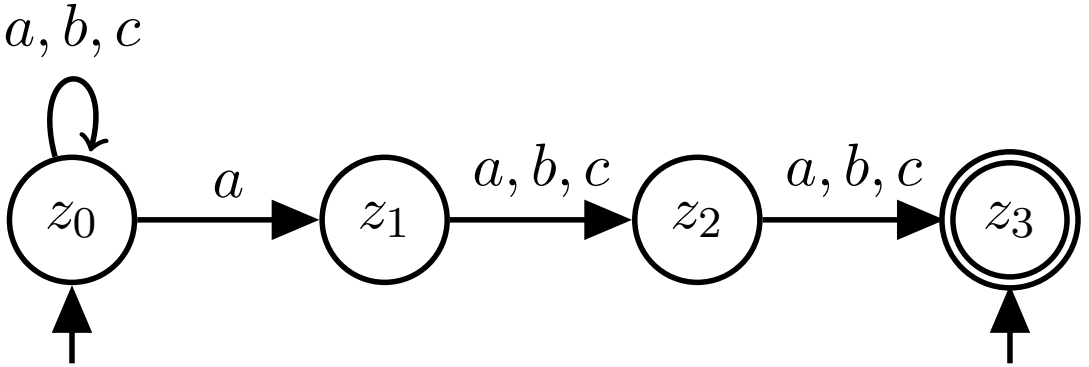
Beachte: Während es bei DFAs genau einen Lauf pro Wort gibt, kann es bei NFAs mehrere geben.

Beispiel

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b, c\}, \delta, \{z_0, z_3\}, \{z_3\})$ ein NFA mit

$$\begin{array}{llll} \delta(z_0, a) = \{z_0, z_1\} & \delta(z_1, a) = \{z_2\} & \delta(z_2, a) = \{z_3\} & \delta(z_3, a) = \emptyset \\ \delta(z_0, b) = \{z_0\} & \delta(z_1, b) = \{z_2\} & \delta(z_2, b) = \{z_3\} & \delta(z_3, b) = \emptyset \\ \delta(z_0, c) = \{z_0\} & \delta(z_1, c) = \{z_2\} & \delta(z_2, c) = \{z_3\} & \delta(z_3, c) = \emptyset \end{array}$$

Der Zustandsgraph zu M ist



.

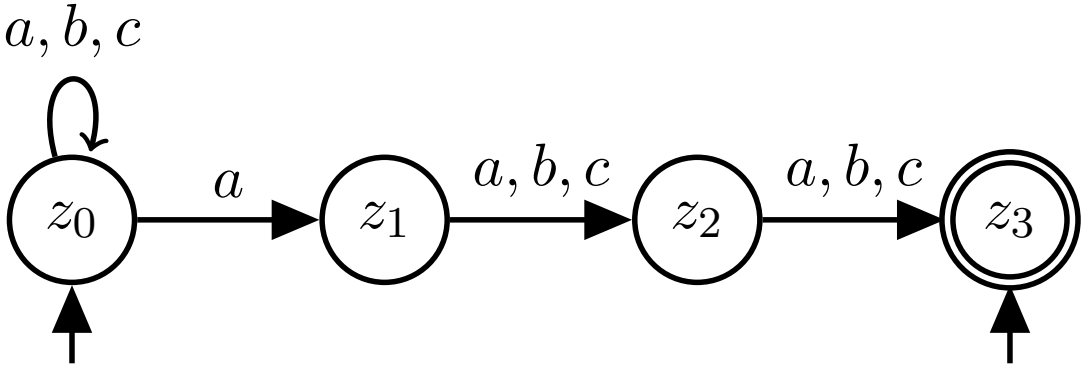
$$L(M) = ?$$

Beispiel

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{a, b, c\}, \delta, \{z_0, z_3\}, \{z_3\})$ ein NFA mit

$$\begin{array}{llll} \delta(z_0, a) = \{z_0, z_1\} & \delta(z_1, a) = \{z_2\} & \delta(z_2, a) = \{z_3\} & \delta(z_3, a) = \emptyset \\ \delta(z_0, b) = \{z_0\} & \delta(z_1, b) = \{z_2\} & \delta(z_2, b) = \{z_3\} & \delta(z_3, b) = \emptyset \\ \delta(z_0, c) = \{z_0\} & \delta(z_1, c) = \{z_2\} & \delta(z_2, c) = \{z_3\} & \delta(z_3, c) = \emptyset \end{array}$$

Der Zustandsgraph zu M ist



.

$$L(M) = \{\varepsilon\} \cup \{uaw \mid u \in \{a, b, c\}^*, w \in \{a, b, c\}^2\}$$

Jede reguläre Sprache wird durch NFA erkannt

Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit $L(G) = L$.

Jede reguläre Sprache wird durch NFA erkannt

Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit $L(G) = L$.
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$ ein NFA mit $Z = V \dot\cup \{z_E\}$ (z_E neu), $S' = \{S\}$ und $E = \{z_E, S\}$ falls $S \to \varepsilon \in P$, sonst $E = \{z_E\}$, und

  $\delta(A, a) := \{B \mid A \to aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \to a \in P\}$

  $\delta(z_E, a) := \emptyset$ für alle $a \in \Sigma$.

Jede reguläre Sprache wird durch NFA erkannt

Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit $L(G) = L$.
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$ ein NFA mit $Z = V \dot\cup \{z_E\}$ (z_E neu), $S' = \{S\}$ und $E = \{z_E, S\}$ falls $S \to \varepsilon \in P$, sonst $E = \{z_E\}$, und

  $\delta(A, a) := \{B \mid A \to aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \to a \in P\}$

  $\delta(z_E, a) := \emptyset$ für alle $a \in \Sigma$.
- Es gilt: $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.

Jede reguläre Sprache wird durch NFA erkannt

Theorem 4.4.1

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis:

- Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik mit $L(G) = L$.
- Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$ ein NFA mit $Z = V \dot\cup \{z_E\}$ (z_E neu), $S' = \{S\}$ und $E = \{z_E, S\}$ falls $S \to \varepsilon \in P$, sonst $E = \{z_E\}$, und

  $\delta(A, a) := \{B \mid A \to aB \in P\} \cup \{z_E \mid \text{falls } A \to a \in P\}$

  $\delta(z_E, a) := \emptyset$ für alle $a \in \Sigma$.
- Es gilt: $\varepsilon \in L(M) \iff \varepsilon \in L(G)$.
- Für $w = a_1 \cdots a_n$ gilt:

  $w \in L(G)$ g.d.w. $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

  g.d.w. Es gibt Zustände $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_{i+1} \in \delta(A_i, a_{i+1})$ für $1 \leq i \leq n-2$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

  g.d.w. $w \in L(M)$

Beispiel: Konstruktion NFA aus Typ 3-Grammatik

Betrachte die reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, A)$
mit $V = \{A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{\ & A \to \varepsilon \mid aB \mid bB \mid cB \mid aC, \\ & B \to aB \mid bB \mid cB \mid aC, \\ & C \to aD \mid bD \mid cD, \\ & D \to a \mid b \mid c\} \end{aligned} .$$

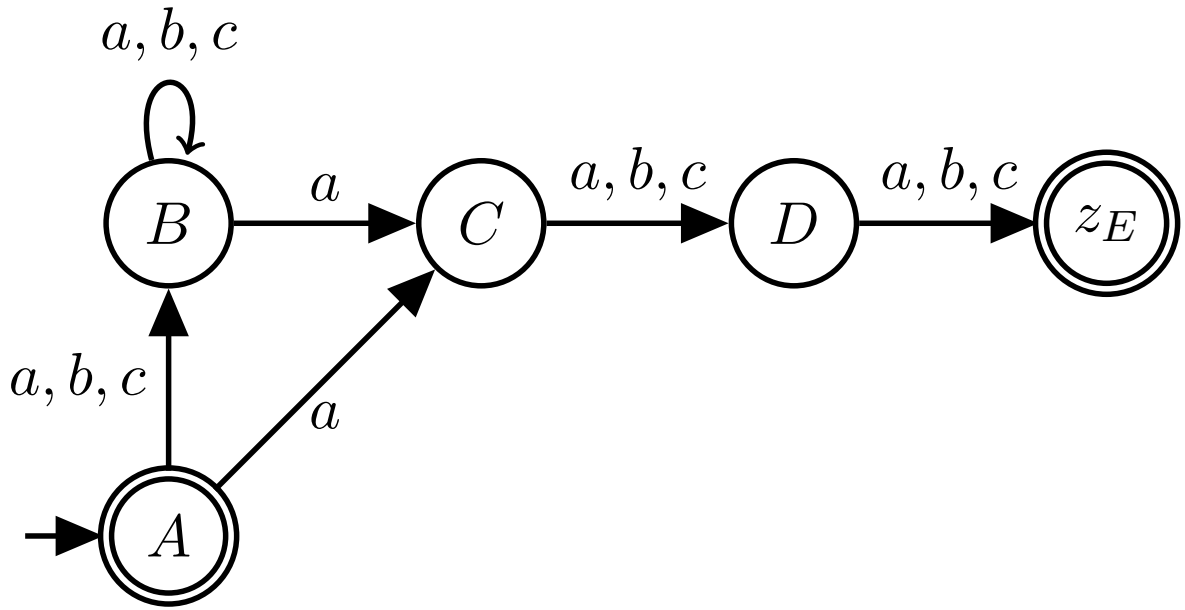
Konstruktion des dazu passenden NFA: $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ mit

- $Z = V \cup \{z_E\} = \{A, B, C, D, z_E\}$,
- $E = \{A, z_E\}$, $S = \{A\}$ und

$\delta(A,a)=\{B,C\}$	$\delta(B,a)=\{B,C\}$	$\delta(C,a)=\{D\}$	$\delta(D,a)=\{z_E\}$	$\delta(z_E,a)=\emptyset$
$\delta(A,b)=\{B\}$	$\delta(B,b)=\{B\}$	$\delta(C,b)=\{D\}$	$\delta(D,b)=\{z_E\}$	$\delta(z_E,b)=\emptyset$
$\delta(A,c)=\{B\}$	$\delta(B,c)=\{B\}$	$\delta(C,c)=\{D\}$	$\delta(D,c)=\{z_E\}$	$\delta(z_E,c)=\emptyset$

Beispiel: Konstruktion NFA aus Typ 3-Grammatik (2)

Der Zustandsgraph zu M ist



NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

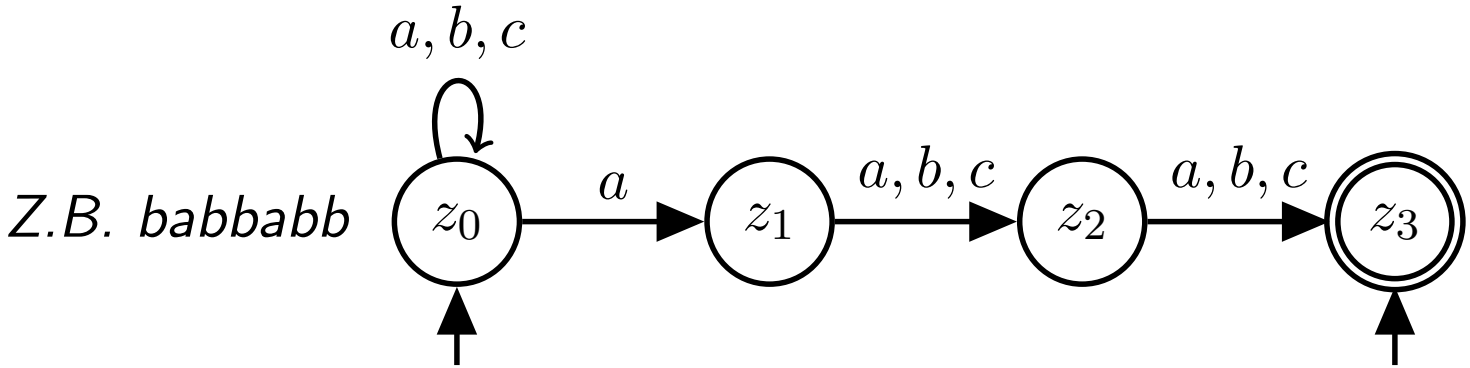
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



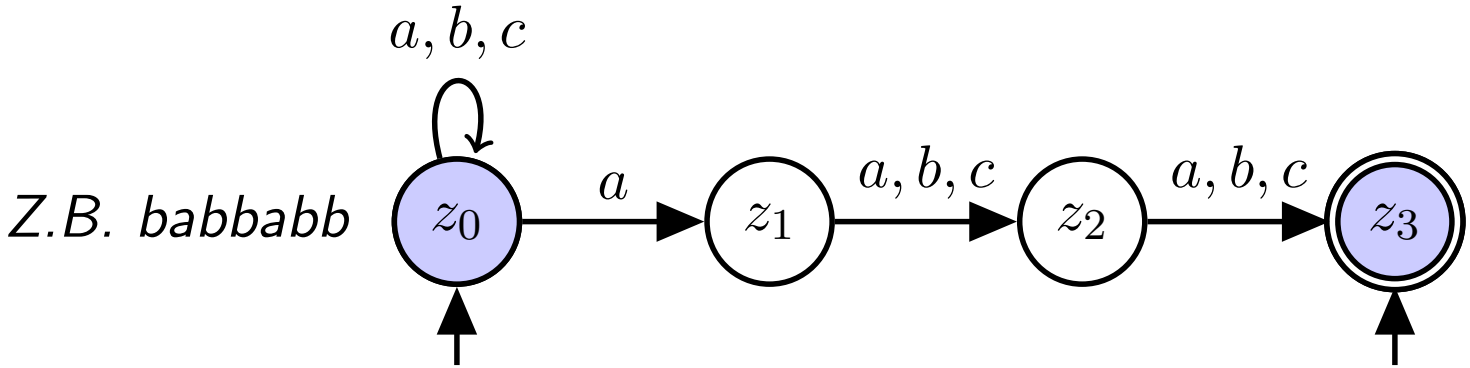
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



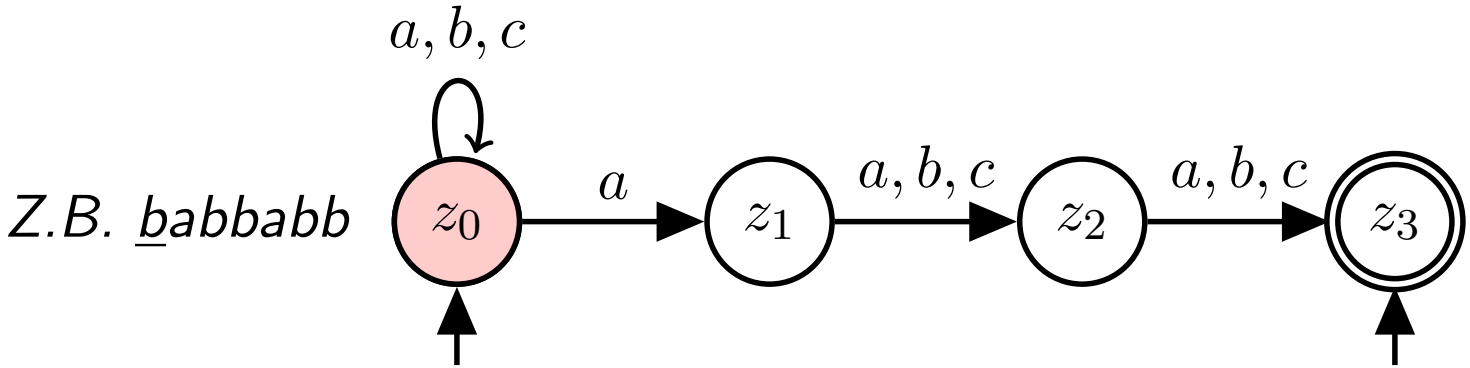
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



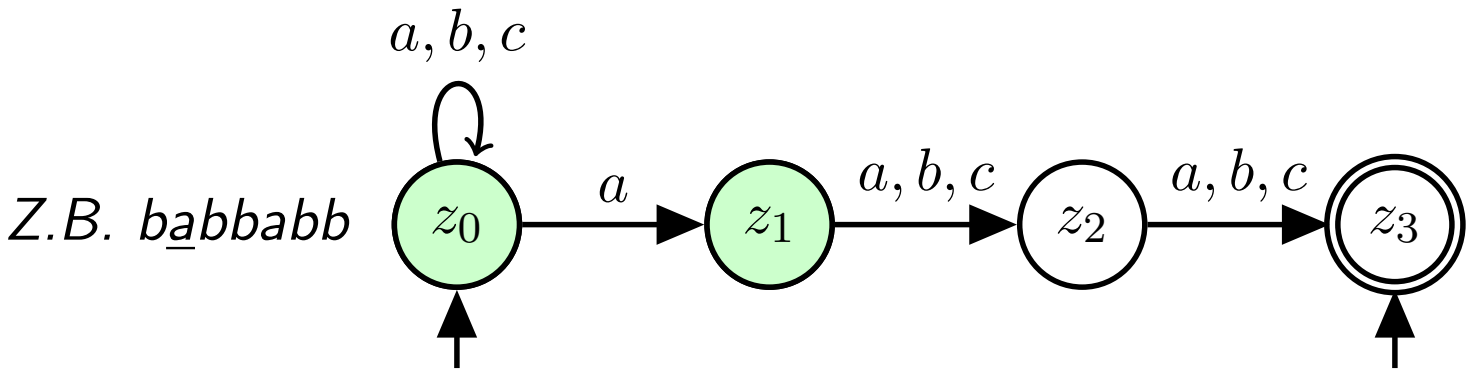
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



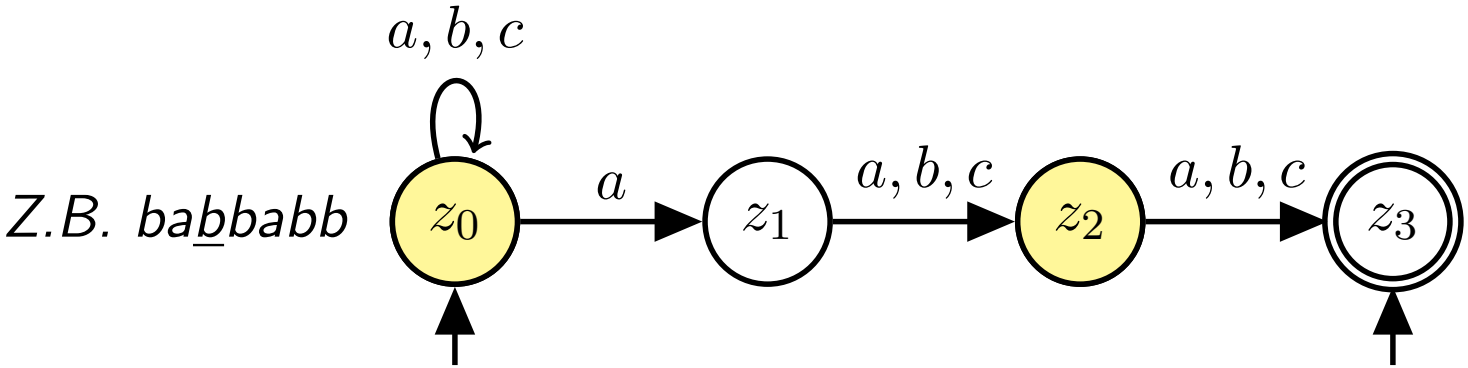
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



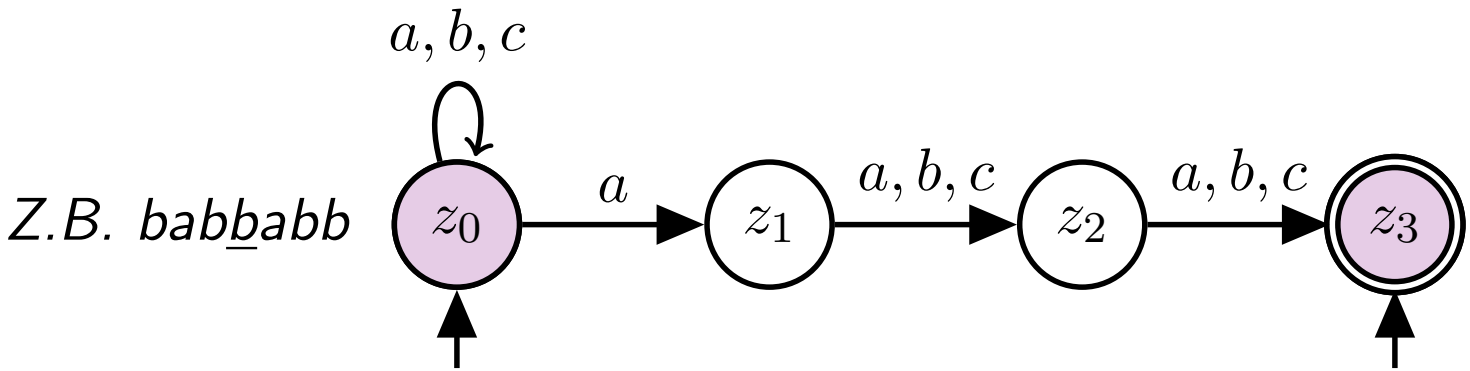
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



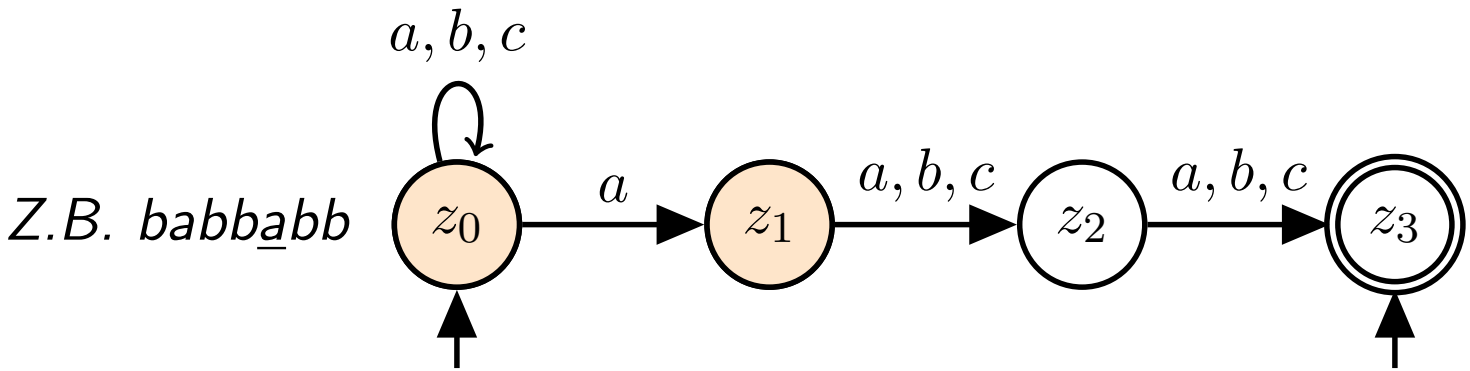
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



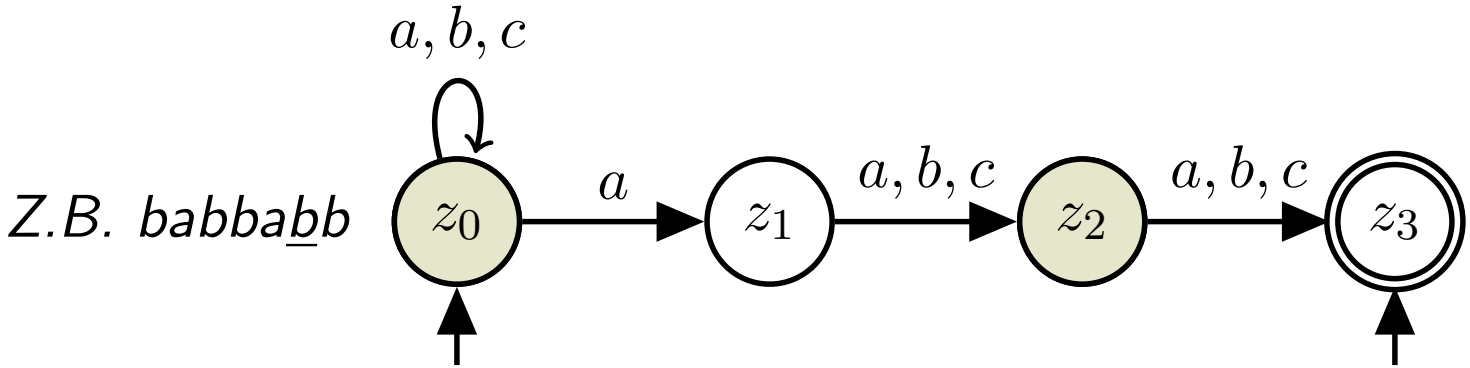
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



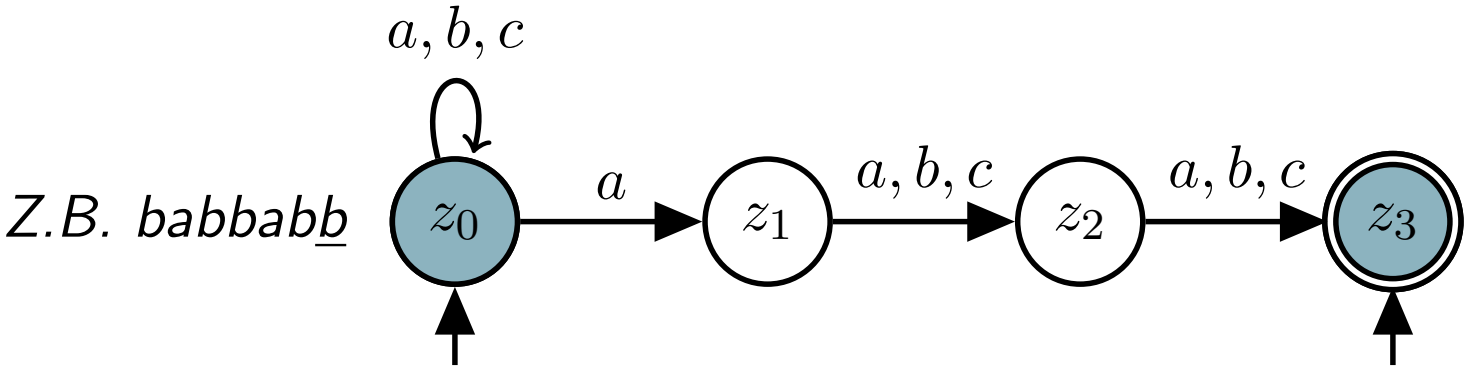
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



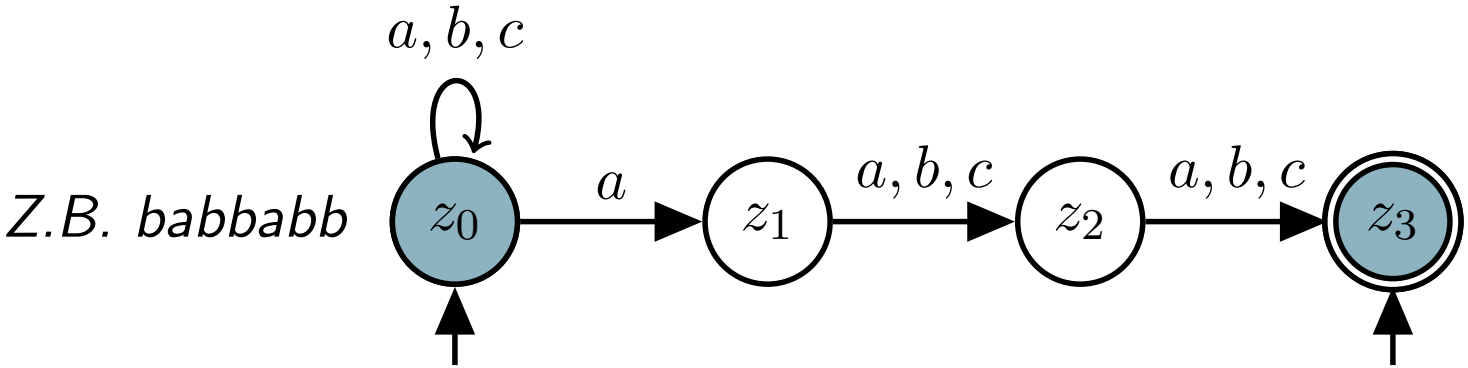
NFAs in DFAs transformieren

Theorem 4.5.1 (Rabin & Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweisidee:

- Konstruiere für einen gegebenen NFA einen DFA, sodass sich *„der DFA* **alle** *Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte“*



- *Konstruktion: Jede Teilmenge von Zuständen des NFA wird zu einem Zustand des DFA (daher: Potenzmengenkonstruktion)*

Potenzmengenkonstruktion

Für NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ konstruieren wir den DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$ mit

- $Z' = \mathcal{P}(Z)$
  „Zustandsmenge ist Potenzmenge von Z“
- $S' = S$
  „Startzustand ist Menge S aller Startzustände von M“
- $E' = \{X \in Z' \mid (E \cap X) \neq \emptyset\}$
  „Jede Menge, die mind. einen Endzustand von E enthält, ist Endzustand in M'“
- $\delta'(X, a) = \bigcup_{z \in X} \delta(z, a) = \widehat{\delta}(X, a)$
  „$\delta'(X, a)$ berechnet alle von einem Zustand in X aus über a erreichbaren Zustände.“

Korrektheit der Potenzmengenkonstruktion

Wir beweisen, dass $L(M) = L(M')$ gilt, indem wir zeigen:

$$w \in L(M) \text{ g.d.w. } w \in L(M')$$

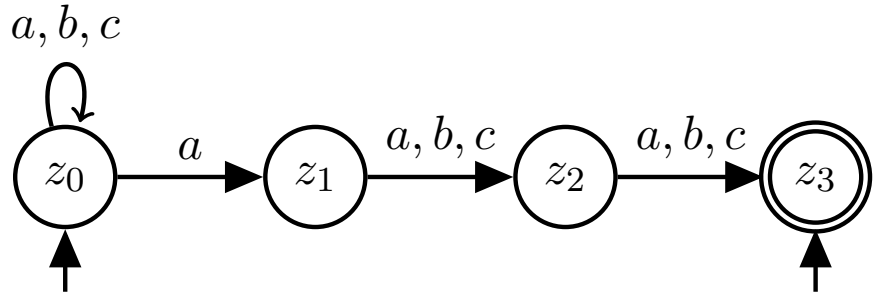
- Fall $w = \varepsilon$:

  $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \cap E \neq \emptyset$ g.d.w $S \in E'$ g.d.w. $\varepsilon \in L(M')$

- Fall $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$:

	$w \in L(M)$
g.d.w.	$\widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset$
g.d.w.	Es gibt Teilmengen $Z_1, \ldots, Z_n$ von Z mit $\delta(S, a_1) = Z_1$, $\delta(Z_i, a_{i+1}) = Z_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$
g.d.w.	$\widehat{\delta'}(S', w) \in E'$
g.d.w	$w \in L(M')$

Beispiel: Potenzmengenkonstruktion

Für NFA 

wird der DFA konstruiert:

$M' = (\mathcal{P}(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}), \{a, b, c\}, \delta', S', E')$ mit

$S' = \{z_0, z_3\}$

$E' = \{\{z_3\}, \{z_0, z_3\}, \{z_1, z_3\}, \{z_2, z_3\}, \{z_0, z_1, z_3\}, \{z_0, z_2, z_3\}, \{z_1, z_2, z_3\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\}\}$

$\delta'(\emptyset, d) = \emptyset$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_0\}, a) = \{z_0, z_1\}$

$\delta'(\{z_0\}, d) = \{z_0\}$ für $d \in \{b, c\}$

$\delta'(\{z_1\}, d) = \{z_2\}$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_2\}, d) = \{z_3\}$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_3\}, d) = \emptyset$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_1\}, a) = \{z_0, z_1, z_2\}$

$\delta'(\{z_0, z_1\}, d) = \{z_0, z_2\}$ für $d \in \{b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_2\}, a) = \{z_0, z_1, z_3\}$

$\delta'(\{z_0, z_2\}, d) = \{z_0, z_3\}$ für $d \in \{b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_3\}, a) = \{z_0, z_1\}$

$\delta'(\{z_0, z_3\}, d) = \{z_0\}$ für $d \in \{b, c\}$

$\delta'(\{z_1, z_2\}, d) = \{z_2, z_3\}$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_1, z_3\}, d) = \{z_2\}$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_2, z_3\}, d) = \{z_3\}$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_1, z_2\}, a) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

$\delta'(\{z_0, z_1, z_2\}, d) = \{z_0, z_2, z_3\}$ für $d \in \{b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_1, z_3\}, a) = \{z_0, z_1, z_2\}$

$\delta'(\{z_0, z_1, z_3\}, d) = \{z_0, z_2\}$ für $d \in \{b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_2, z_3\}, a) = \{z_0, z_1, z_3\}$

$\delta'(\{z_0, z_2, z_3\}, d) = \{z_0, z_3\}$ für $d \in \{b, c\}$

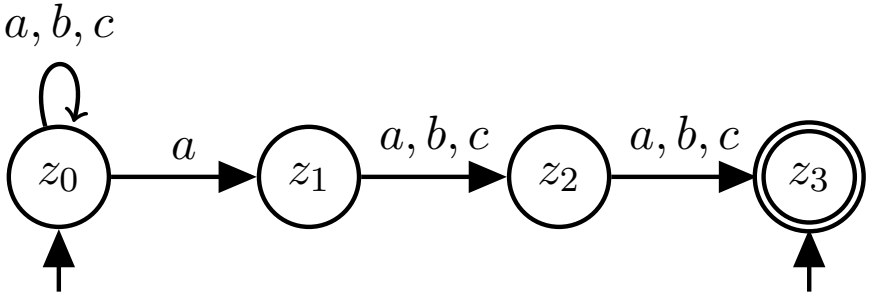
$\delta'(\{z_1, z_2, z_3\}, d) = \{z_2, z_3\}$ für $d \in \{a, b, c\}$

$\delta'(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, a) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

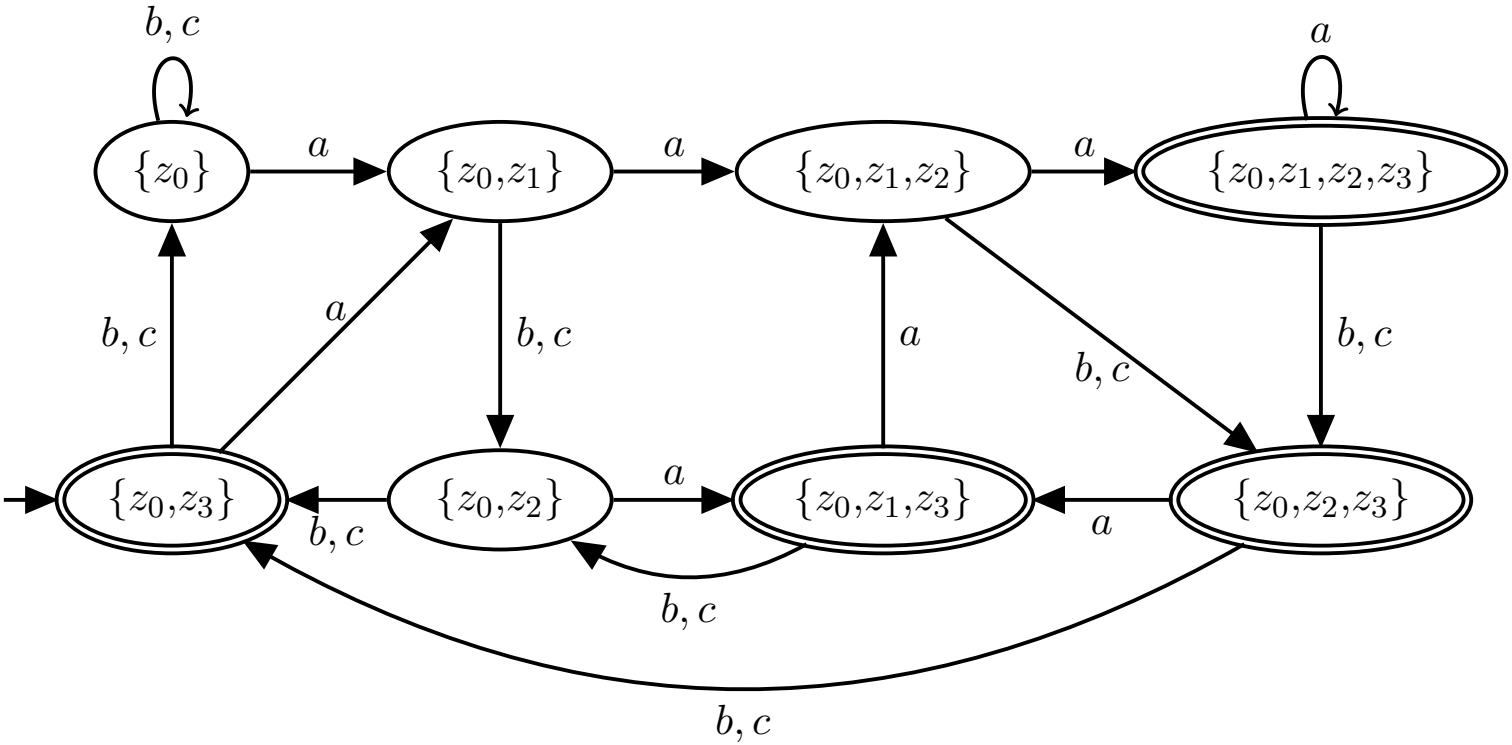
$\delta'(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, b) = \{z_0, z_2, z_3\}$

$\delta'(\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, c) = \{z_0, z_2, z_3\}$

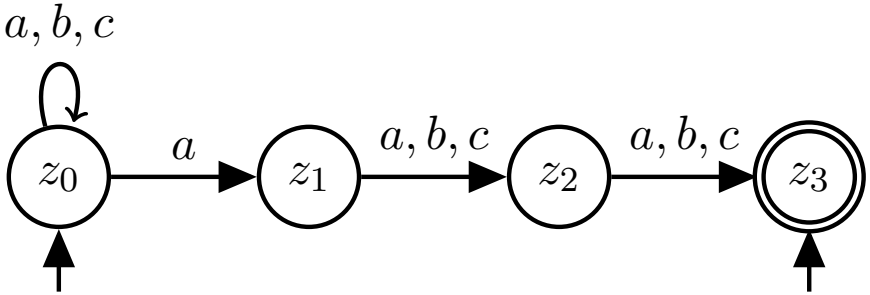
Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)



DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

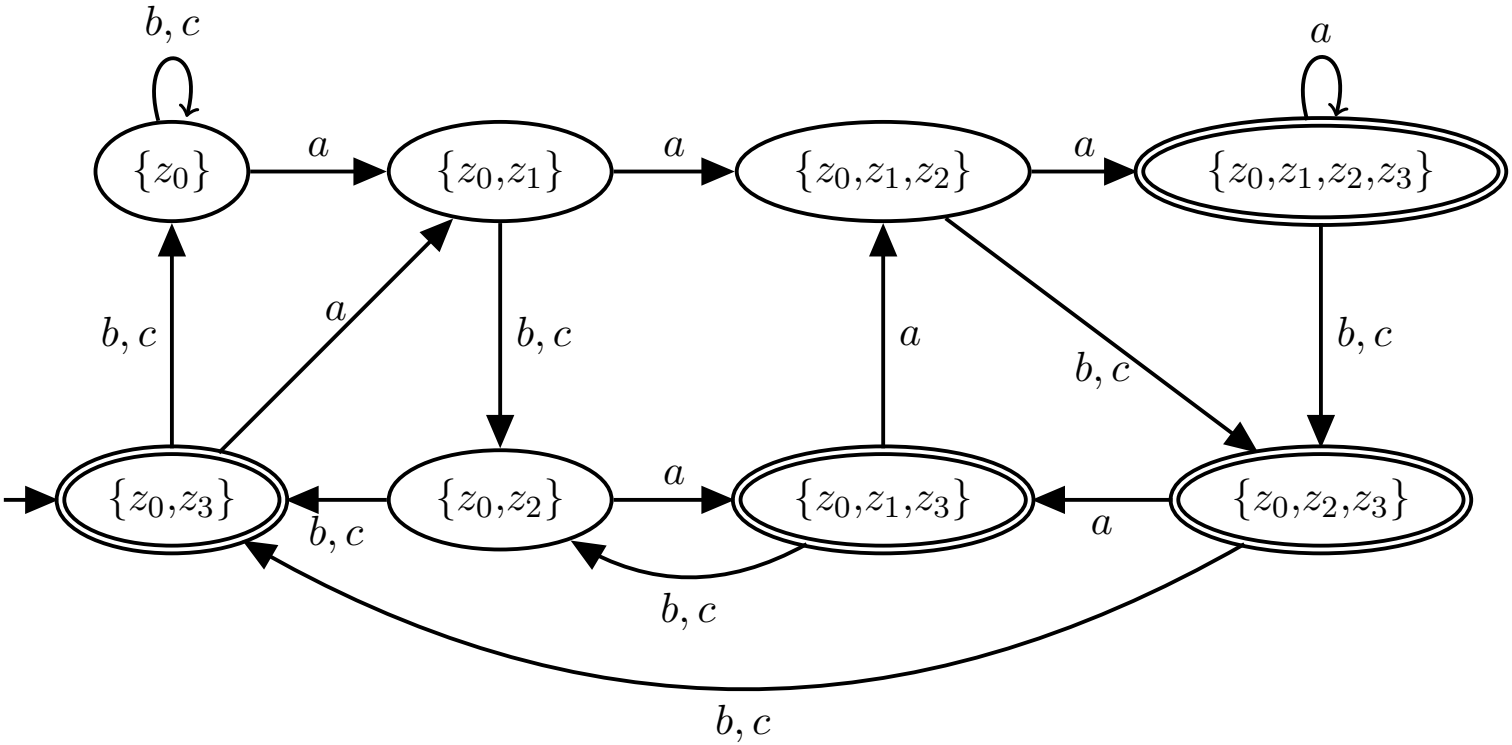


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

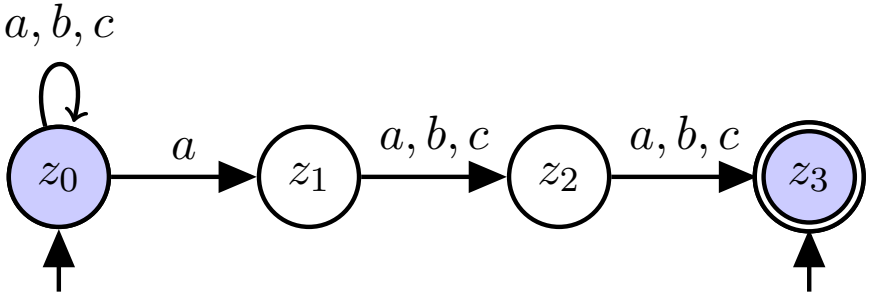


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

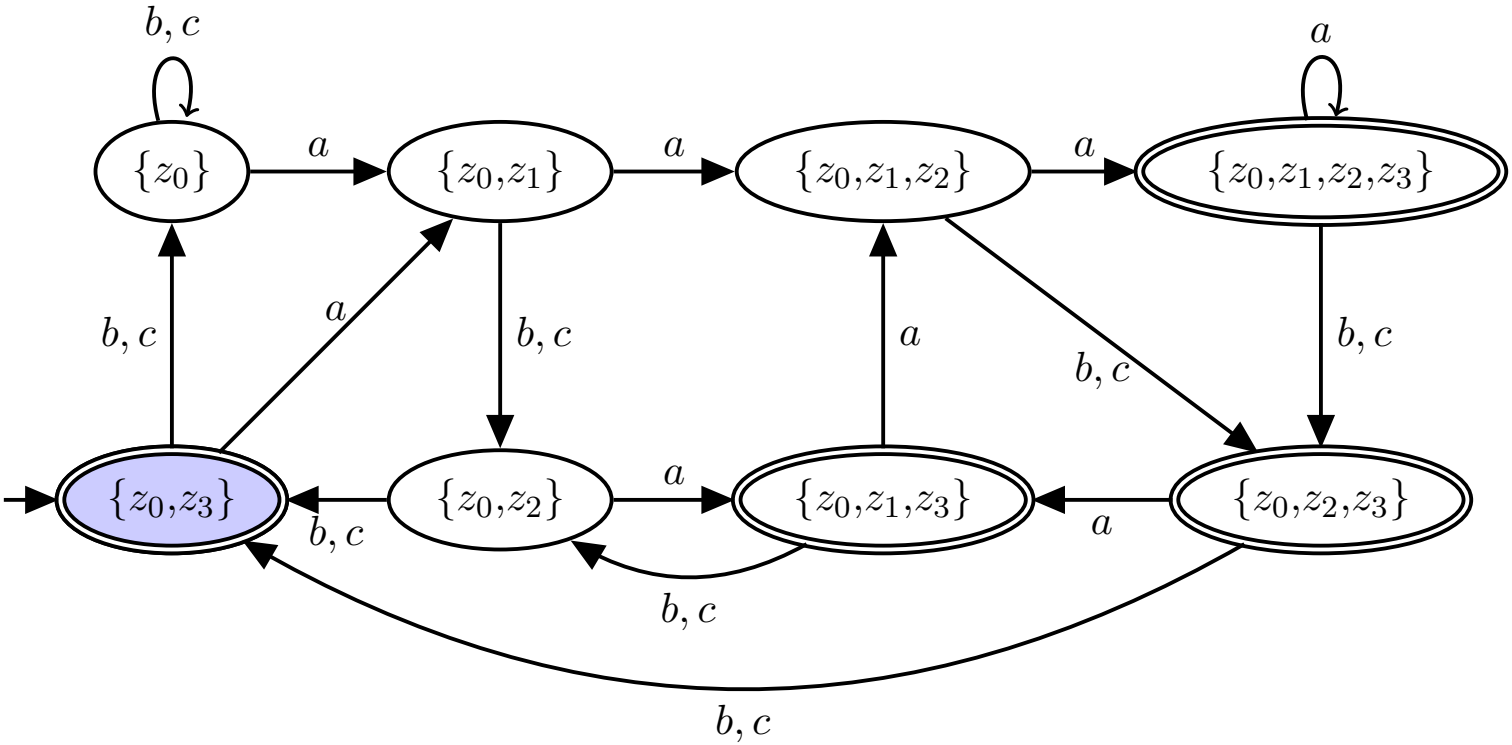


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

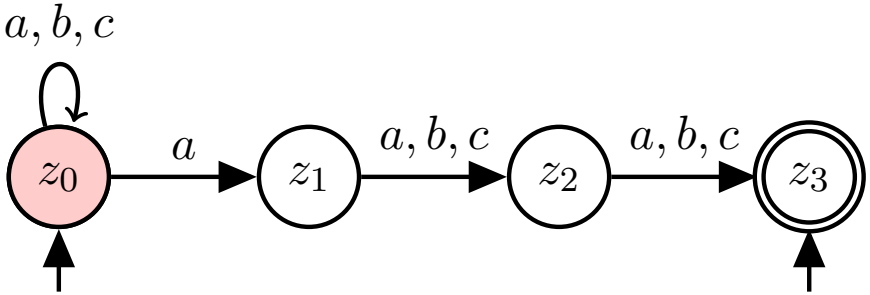


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

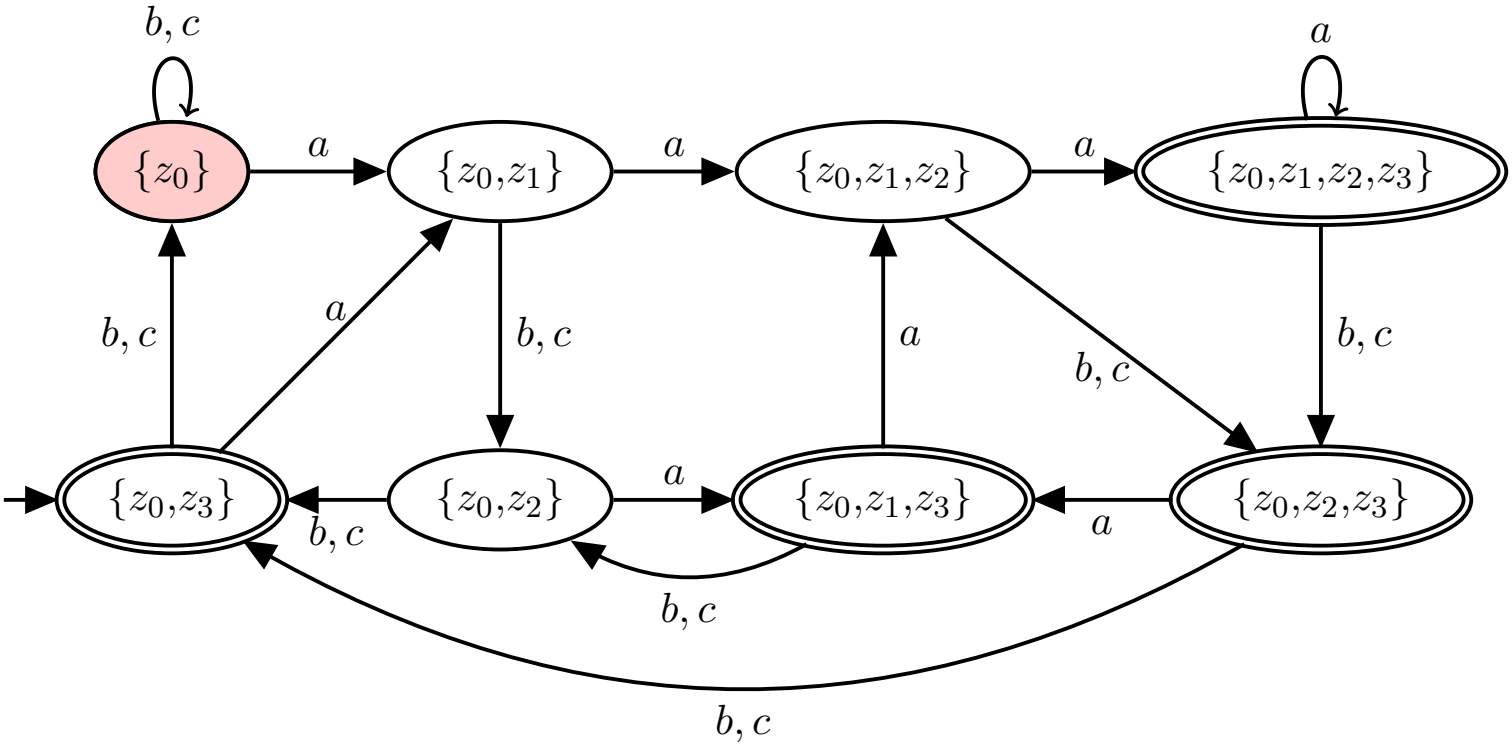


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

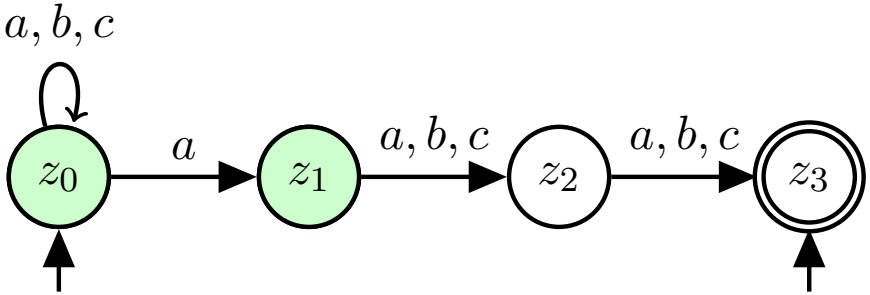


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

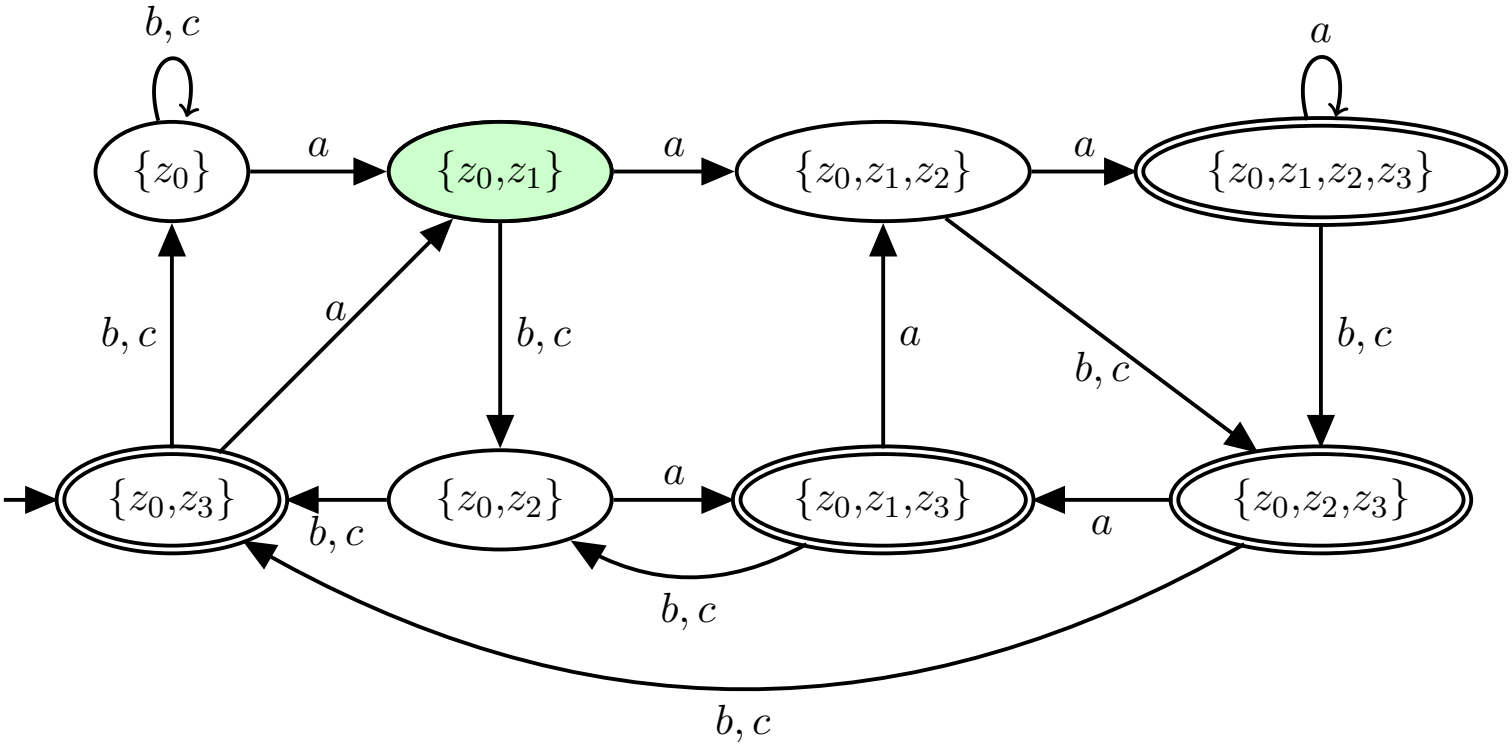


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

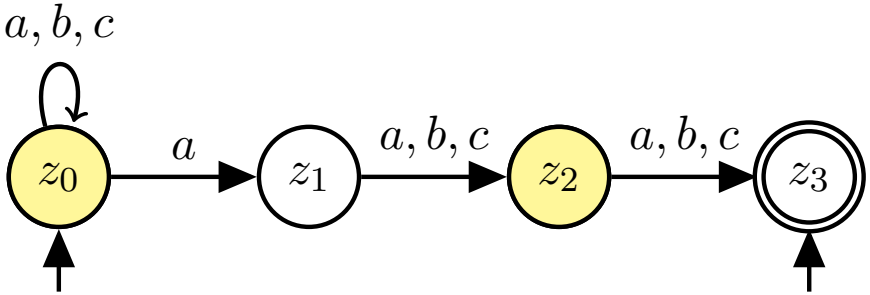


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

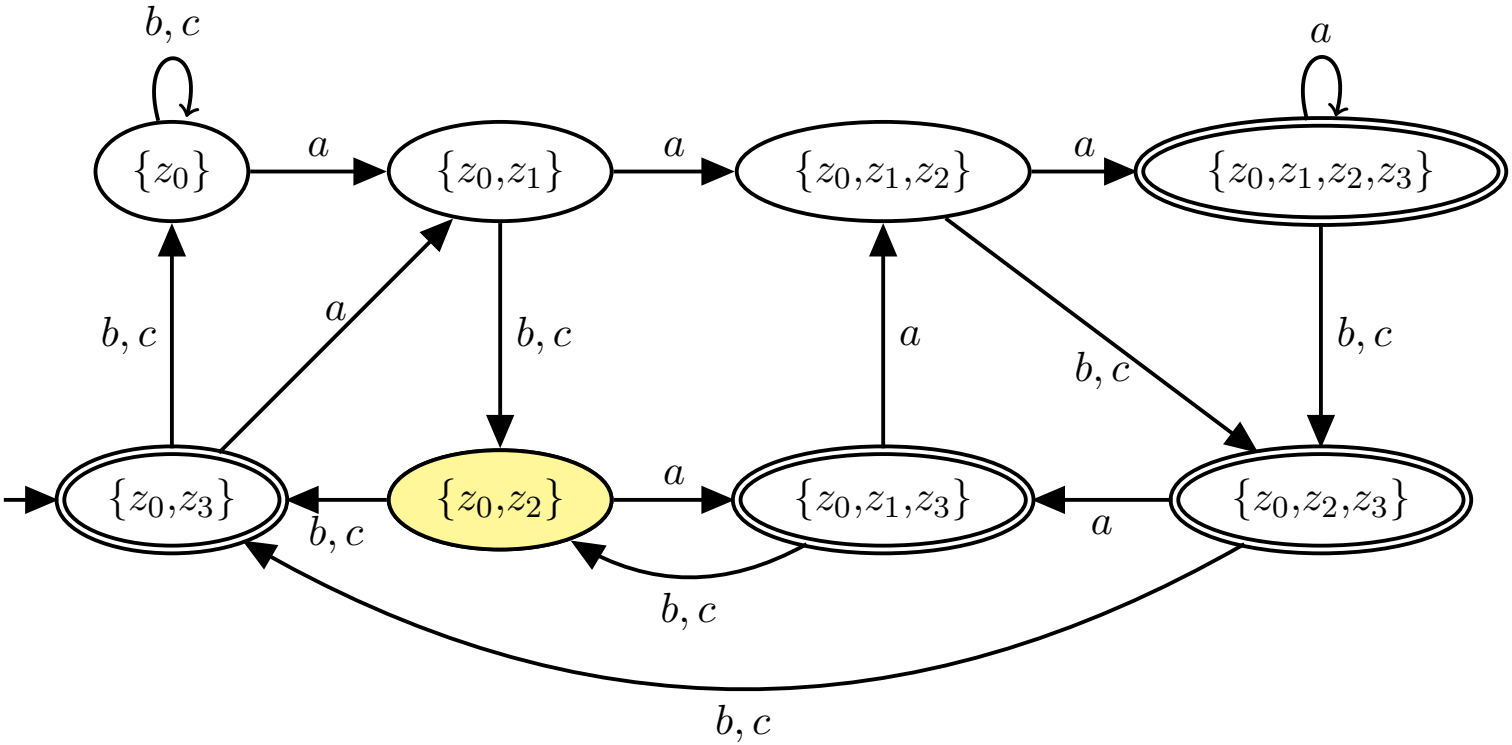


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

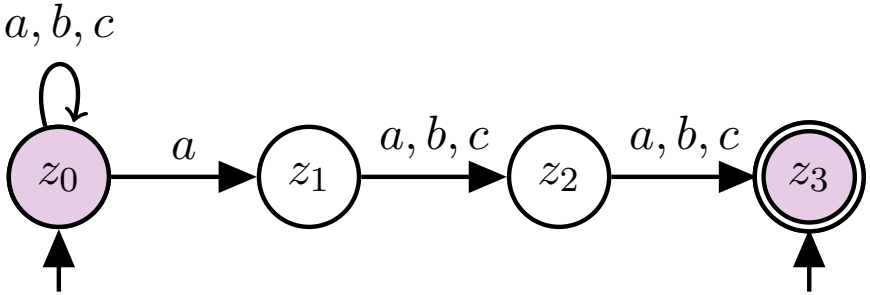


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

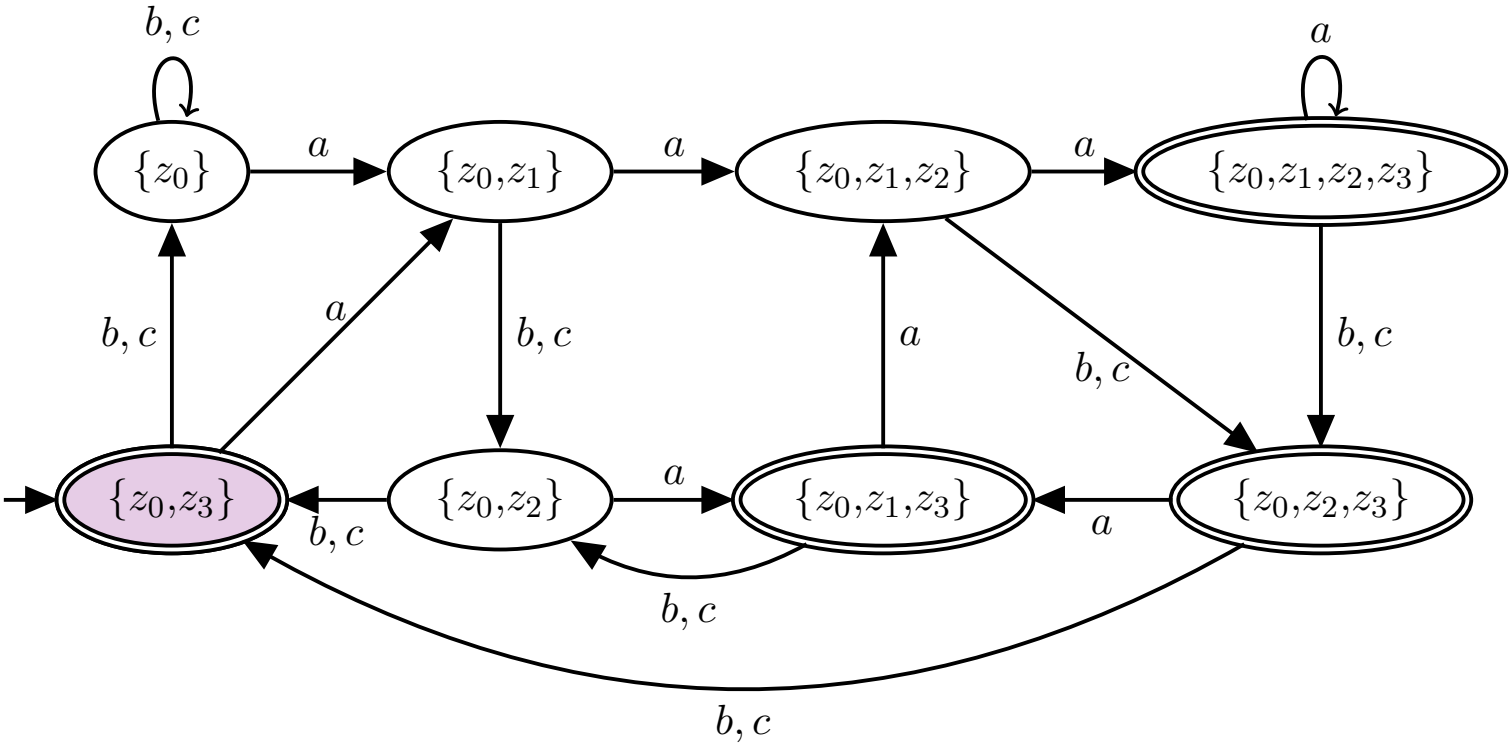


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

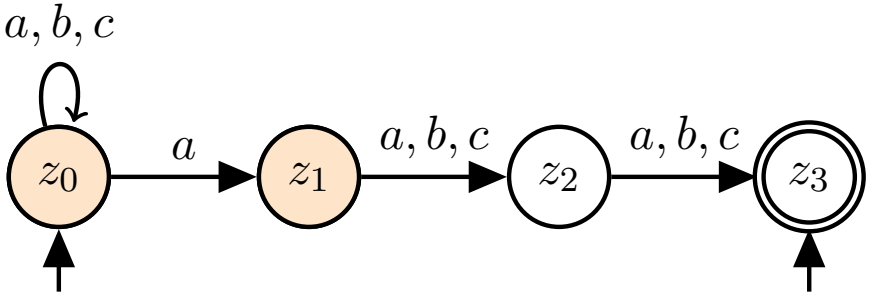


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

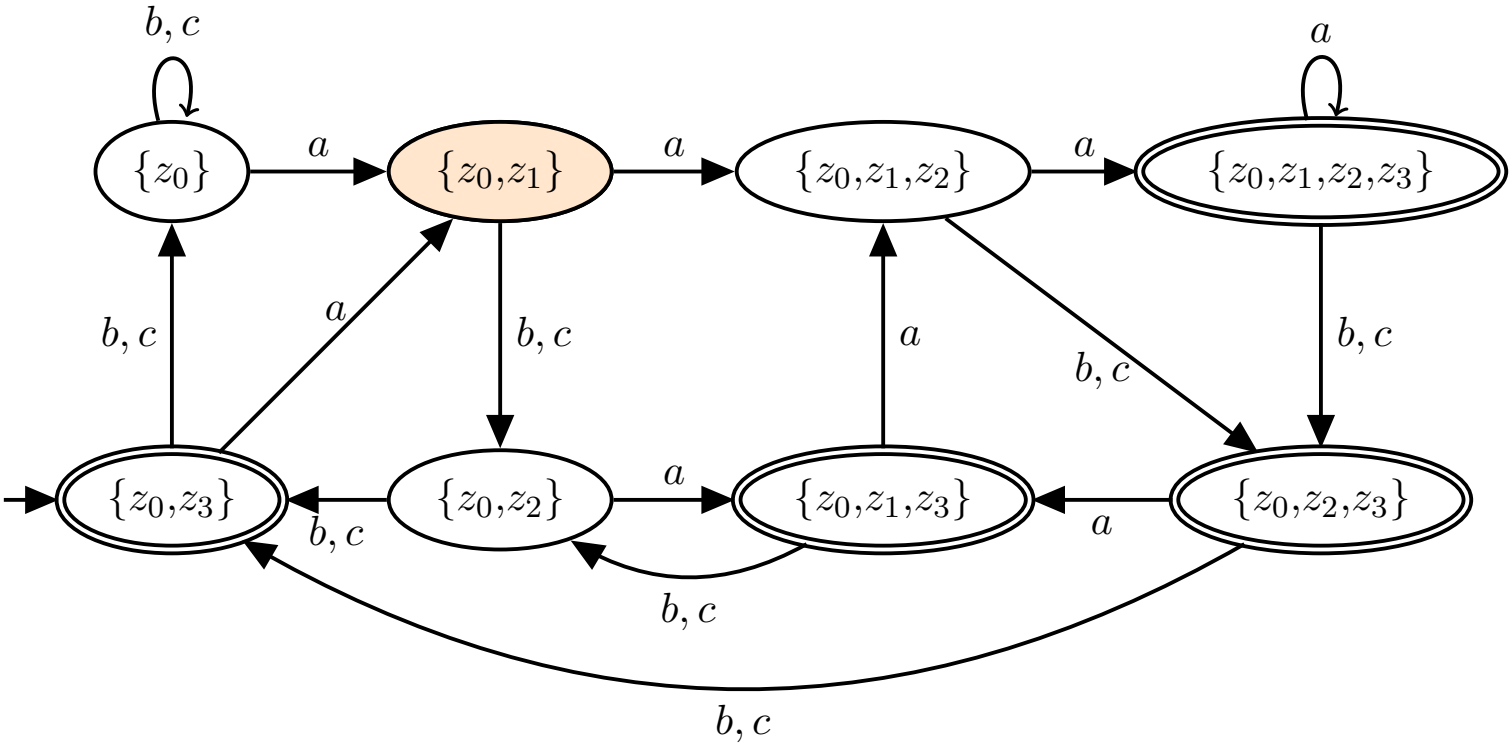


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

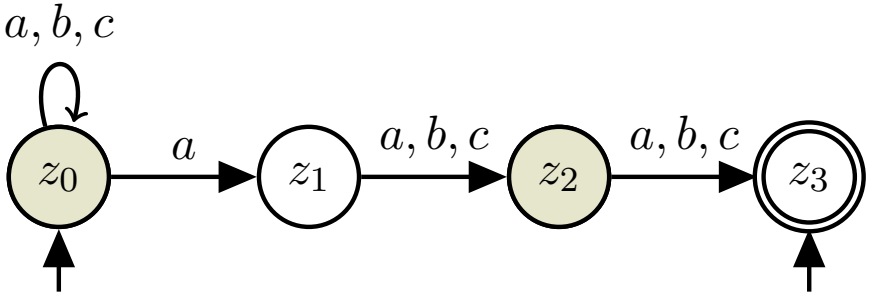


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

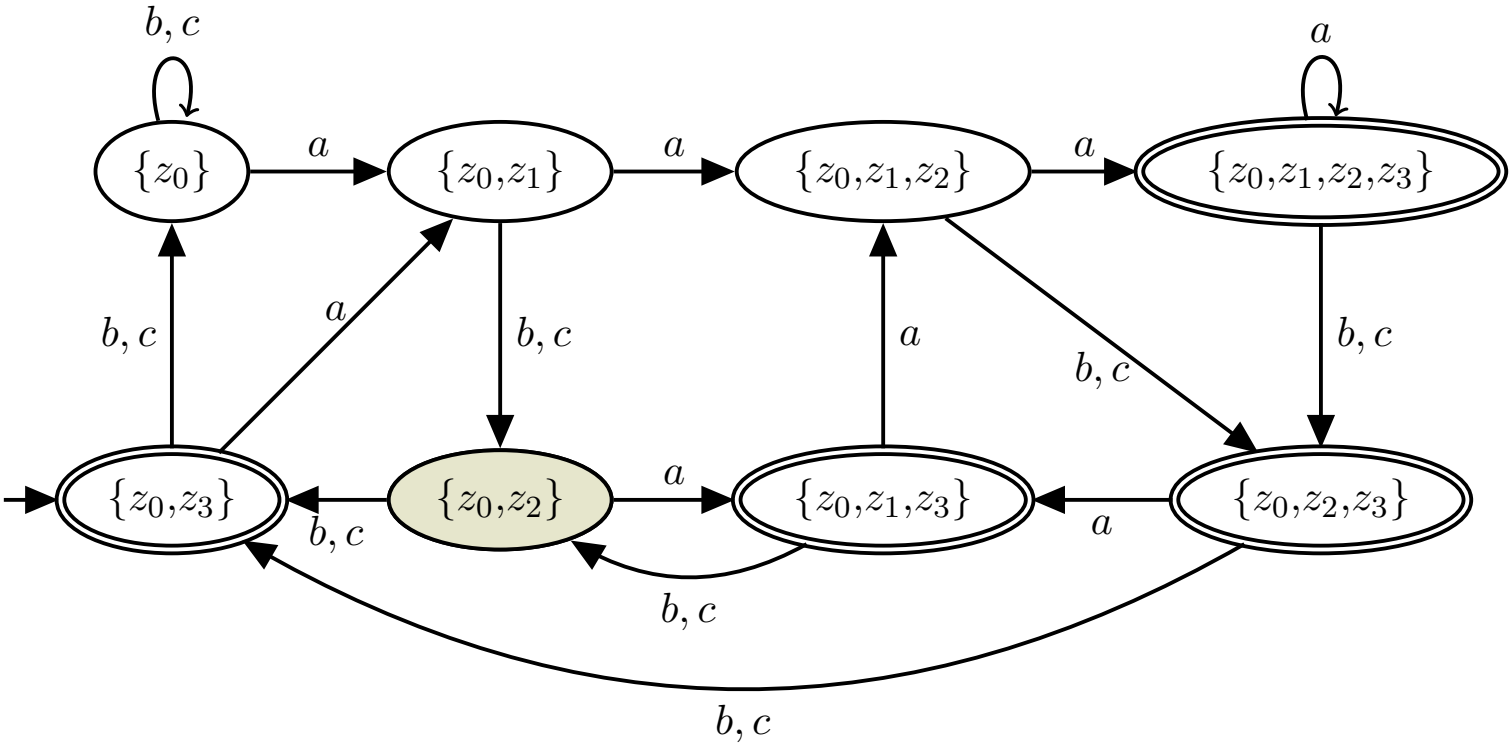


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)

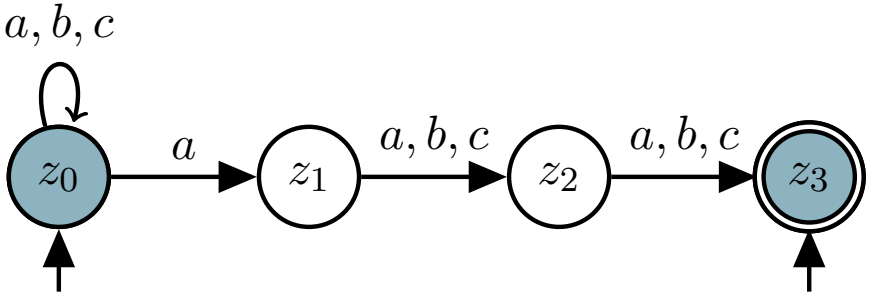


Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):

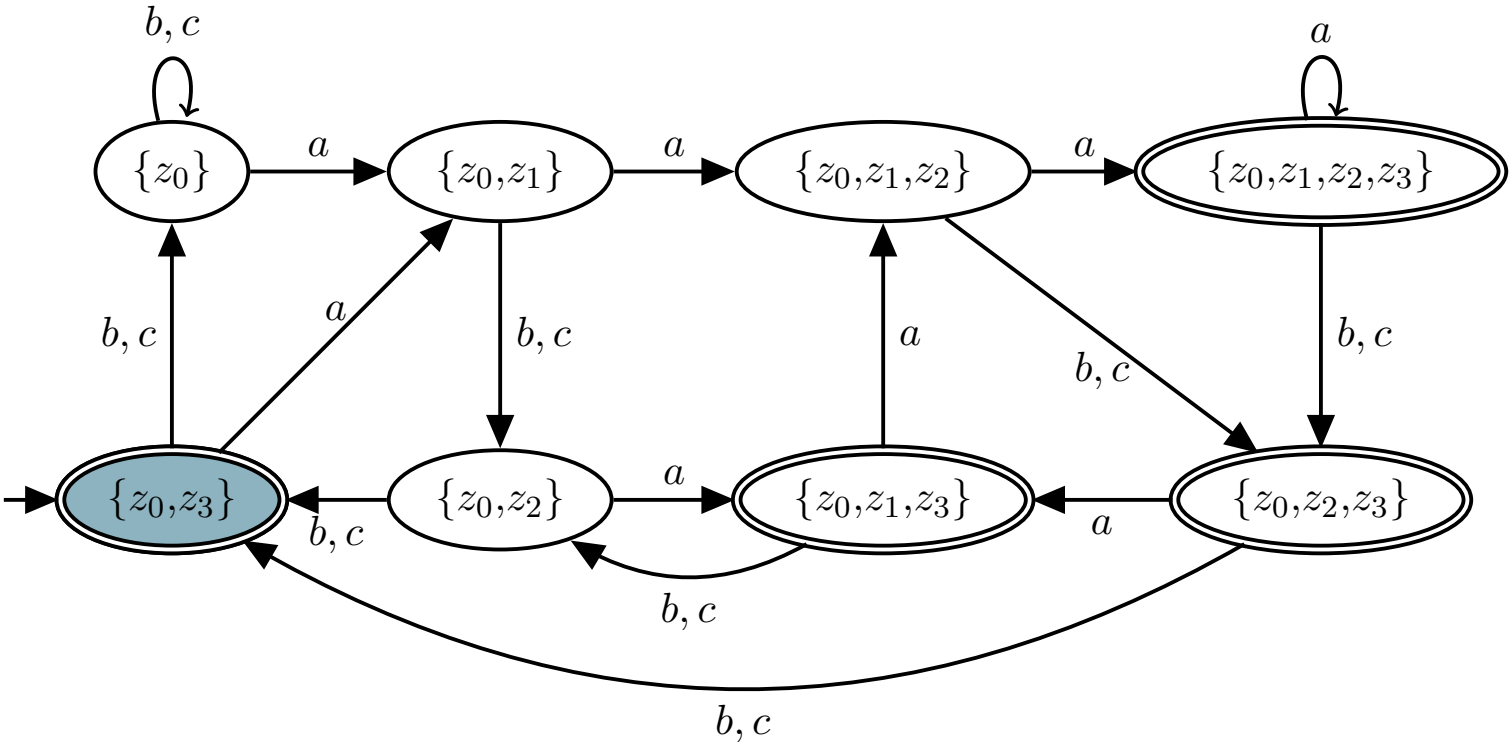


Beispiel: Potenzmengenkonstruktion (2)



Ablauf bei Eingabe babbabb

DFA als Zustandsgraph (nur erreichbare Zustände):



DFAs & NFAs sind Formalismen für Typ 3-Sprachen

Theorem 4.5.4

DFAs und NFAs erkennen genau die regulären Sprachen.

Das folgt aus:

- Theorem 4.2.1: Sei M ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär.
- Theorem 4.4.1: Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.
- Theorem 4.5.1: Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.
- Jeder DFA kann leicht auch als NFA interpretiert werden

Größe des DFAs vs NFAs (1)

- Sei M ein NFA mit n Zuständen.
- Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände!
- D.h. der Platz explodiert uns!
- Frage: Geht es besser (unsere Kodierung ist zu einfach) oder nicht?
- Das folgende Lemma zeigt, dass es nicht wirklich besser geht

Größe des DFAs vs NFAs (2)

Lemma

Sei $L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
(Sprache aller Wörter aus $\{a,b\}^*$, die an n-letzter Stelle ein a haben).

- Es gibt NFA M_n mit $L(M_n) = L_n$ und M_n hat $n+1$ Zustände.
- Jeder DFA M'_n mit $L(M'_n) = L_n$, hat mindestens 2^n Zustände.

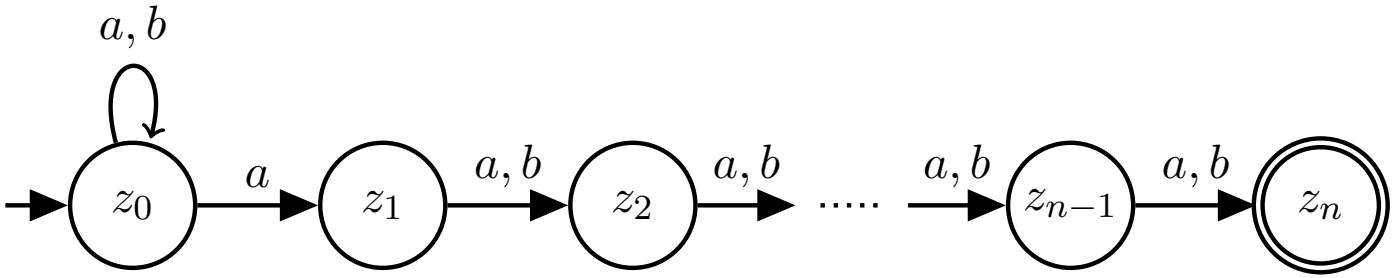
Größe des DFAs vs NFAs (2)

Lemma

Sei $L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
(Sprache aller Wörter aus $\{a,b\}^*$, die an n-letzter Stelle ein a haben).

- Es gibt NFA M_n mit $L(M_n) = L_n$ und M_n hat $n+1$ Zustände.
- Jeder DFA M'_n mit $L(M'_n) = L_n$, hat mindestens 2^n Zustände.

Beweis (Teil 1): Sei M_n der folgende NFA:



$L(M_n) = L_n$, denn:

- zum Akzeptieren müssen $z_0, z_1, \ldots z_n$ nacheinander durchlaufen werden, was genau mit Wörtern av mit $v \in \{a,b\}^{n-1}$ möglich ist
- In z_0 kann zuvor jedes $u \in \{a,b\}^*$ gelesen werden (Verbleib in z_0).

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a, b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist o.B.d.A. $w = au \in L_n$ aber $w' = bu' \notin L_n$ und $z_i \in E$ und $z_i \notin E$ müsste gleichzeitig gelten. **Widerspruch!**

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a,b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a,b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist o.B.d.A. $w = au \in L_n$ aber $w' = bu' \notin L_n$ und $z_i \in E$ und $z_i \notin E$ müsste gleichzeitig gelten. **Widerspruch!**

  Falls $j > 1$: O.B.d.A. $w = uav$ und $w' = ubv'$ mit $|v| = |v'| = n - j$

Größe des DFAs vs NFAs (3)

Beweis (Teil 2): Beweis durch Widerspruch.

- Annahme: Es gibt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und DFA $M' = (Z, \{a,b\}, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L_n = \{uav \mid u \in \{a,b\}^*, v \in \{a,b\}^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$
- Menge $W = \{a,b\}^n$ enthält 2^n Worte der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w \neq w' \in W$ geben mit $\widehat{\delta}(z_0, w) = \widehat{\delta}(z_0, w') = z_i$
- Sei j die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

  Falls $j = 1$, dann ist o.B.d.A. $w = au \in L_n$ aber $w' = bu' \notin L_n$ und $z_i \in E$ und $z_i \notin E$ müsste gleichzeitig gelten. **Widerspruch!**

  Falls $j > 1$: O.B.d.A. $w = uav$ und $w' = ubv'$ mit $|v| = |v'| = n - j$

  Sei $w_0 = wb^{j-1} = uavb^{j-1}$
  $w_0' = w'b^{j-1} = ubv'b^{j-1}$

  Dann muss gelten $\widehat{\delta}(w_0) = \widehat{\delta}(w_0')$, da $\widehat{\delta}(uav) = z_i = \widehat{\delta}(ubv')$.

  Aber $w_0 \in L_n$ und $w_0' \notin L_n$, **Widerspruch!** □

NFAs mit ε-Übergängen

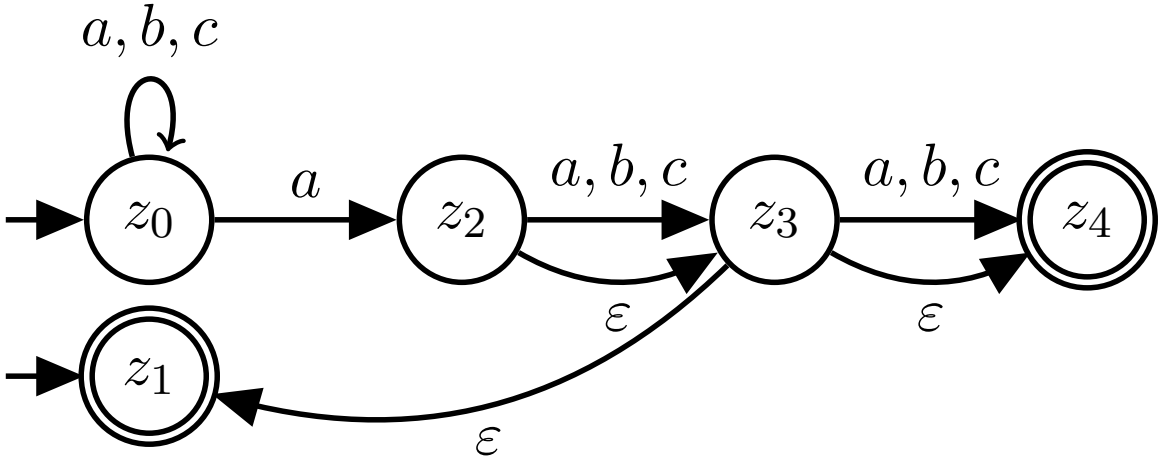
- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens (es wird sozusagen das leere Wort ε gelesen)
- Ausdruckskraft ändert sich mit ε-Übergängen nicht
- ε-Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

Definition (NFA mit ε-Übergängen)

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit ε-Übergängen (NFA mit ε-Übergängen) ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ wobei

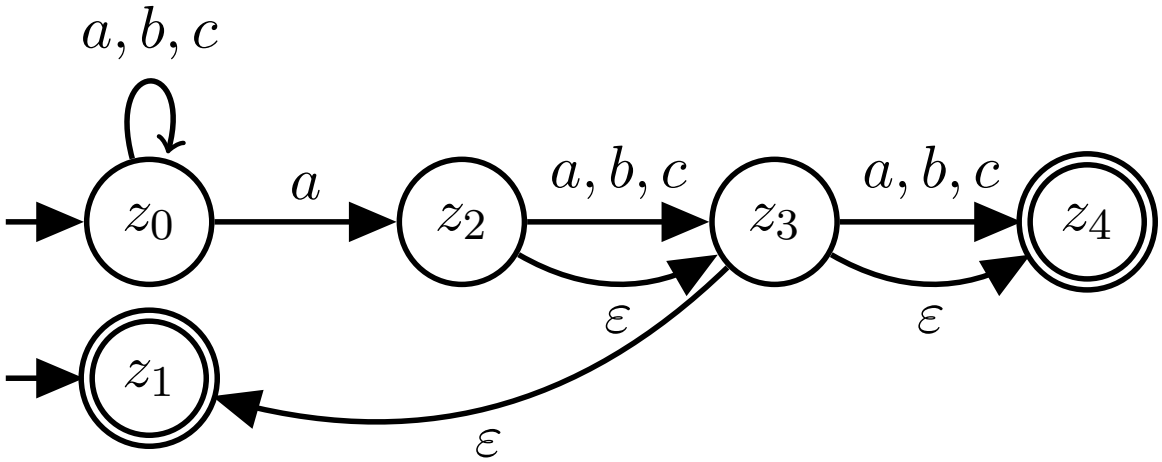
- Z ist eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $(Z \cap \Sigma) = \emptyset$,
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände,
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände und
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Zustandsüberführungsfunktion

Beispiel: NFA mit ε-Übergängen



Akzeptierte Sprache: ?

Beispiel: NFA mit ε-Übergängen



Akzeptierte Sprache:

alle Worte aus $\{a, b, c\}^*$, die an letzter, vorletzter, oder drittletzter Postion ein a haben, und das leere Wort

ε-Hülle

Definition (ε-Hülle)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen. Die ε-Hülle $clos_\varepsilon(z)$ eines Zustands $z \in Z$ ist induktiv definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $z \in clos_\varepsilon(z)$.
2. Wenn $z' \in clos_\varepsilon(z)$ und $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$, dann ist auch $z'' \in clos_\varepsilon(z)$.

Für eine Zustandsmenge $X \subseteq Z$ definieren wir $clos_\varepsilon(X) := \bigcup_{z \in X} clos_\varepsilon(z)$.

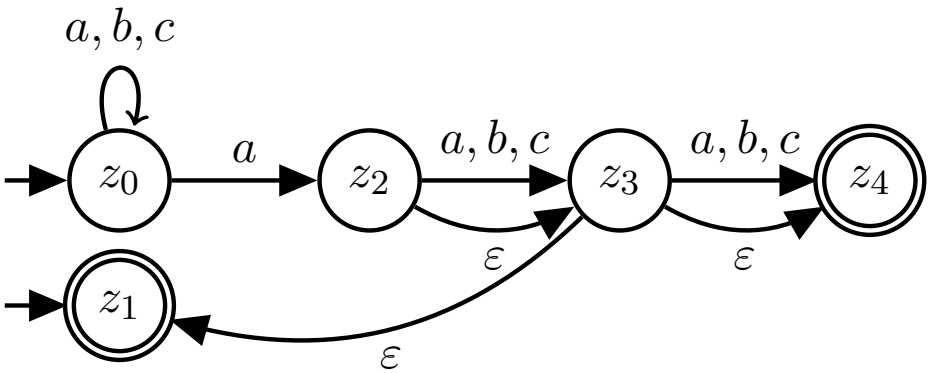
Die ε-Hülle fügt für eine Zustandsmenge alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

ε-Hülle (2)

Die ε-Hülle für eine Zustandsmenge $X \subseteq Z$ kann auch berechnet werden durch:

$$clos_\varepsilon(X) := \begin{cases} X, & \text{wenn } \bigcup_{z \in X} \delta(z, \varepsilon) \subseteq X \\ clos_\varepsilon(X \cup \bigcup_{z \in X} \delta(z, \varepsilon)), & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel



$$
\begin{aligned}
clos_\varepsilon(z_0) &= \{z_0\} \\
clos_\varepsilon(z_1) &= \{z_1\} \\
clos_\varepsilon(z_4) &= \{z_4\} \\
clos_\varepsilon(z_3) &= \{z_1, z_3, z_4\} \\
clos_\varepsilon(z_2) &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}
\end{aligned}
$$

NFA mit ε-Übergängen: Akzeptierte Sprache

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε-Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : (\mathcal{P}(Z) \times \Sigma^*) \to \mathcal{P}(Z)$ induktiv durch:

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \widetilde{\delta}(X, aw) &:= \bigcup_{z \in X} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z, a)), w) \text{ für alle } X \subseteq Z \end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(S), w) \cap E \neq \emptyset\}$$

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis „$\Leftarrow$“:

- Jede reguläre Sprache wird von einem „normalen“ NFA akzeptiert.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis „$\Leftarrow$“:

- Jede reguläre Sprache wird von einem „normalen“ NFA akzeptiert.
- Transformiere diesen NFA in einen NFA mit ε-Übergängen:

  Setze $\delta(z, \varepsilon) = \emptyset$ für alle Zustände z

  Offensichtlich ist die akzeptierte Sprache diesselbe.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (1)

Satz 4.6.7

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis „$\Leftarrow$“:

- Jede reguläre Sprache wird von einem „normalen“ NFA akzeptiert.
- Transformiere diesen NFA in einen NFA mit ε-Übergängen:

  Setze $\delta(z, \varepsilon) = \emptyset$ für alle Zustände z

  Offensichtlich ist die akzeptierte Sprache diesselbe.
- Daher wird jede reguläre Sprache von einem NFA mit ε-Übergängen akzeptiert.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

- Konstruiere NFA M' mit $L(M) = L(M')$. Dann ist $L(M)$ regulär.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

- Konstruiere NFA M' mit $L(M) = L(M')$. Dann ist $L(M)$ regulär.
- $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

ε-Übergänge ändern die Ausdruckskraft nicht (2)

Beweis „$\Rightarrow$“: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.

- Konstruiere NFA M' mit $L(M) = L(M')$. Dann ist $L(M)$ regulär.
- $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit $S' = clos_\varepsilon(S)$, $\delta'(z, a) = clos_\varepsilon(\delta(z, a))$.

$L(M) = L(M')$:

- Wir zeigen $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), w) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), w)$ für alle $X \subseteq Z$ und $w \in \Sigma^*$. Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.
- Basis: $w = \varepsilon$. Dann gilt $\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon) = clos_\varepsilon(X) = \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), \varepsilon)$
- Schritt: Sei $w = au$ mit $a \in \Sigma$. Wir formen um:

$$\widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(X), au) \overset{\text{Def. } \widetilde{\delta}}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widetilde{\delta}(clos_\varepsilon(\delta(z, a)), u) \overset{\text{I.H.}}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(\delta(z, a)), u)$$

$$\overset{\text{Def. } \delta'}{=} \bigcup_{z \in clos_\varepsilon(X)} \widehat{\delta'}(\delta'(z, a), u) \overset{\text{Def. } \widehat{\delta}}{=} \widehat{\delta'}(clos_\varepsilon(X), au)$$

Eindeutige Start- und Endzustände

Satz 4.6.8

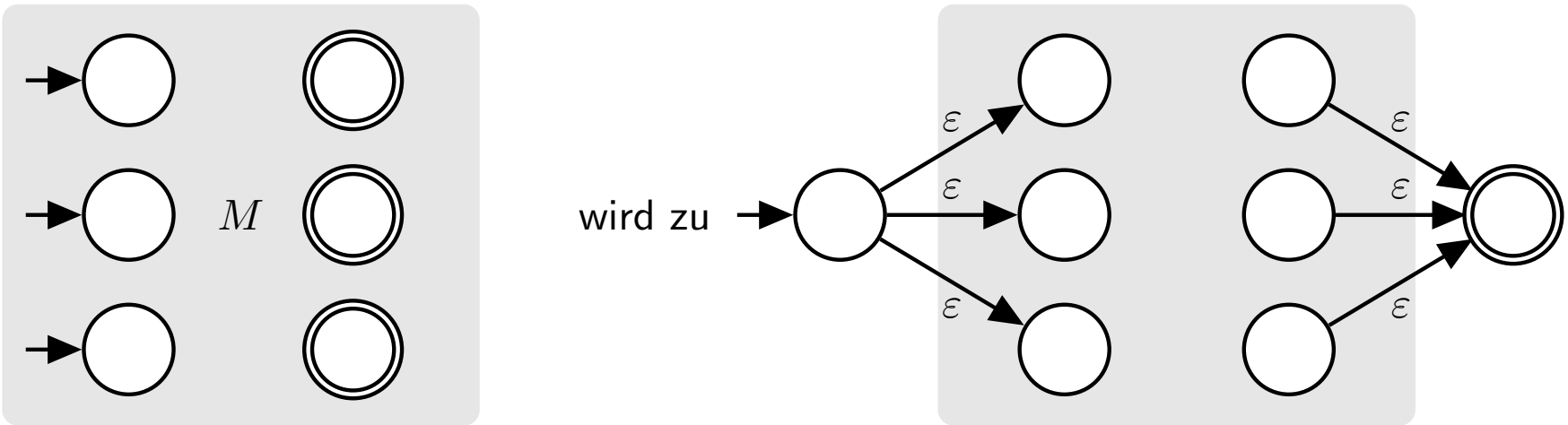
Für jeden NFA M mit ε-Übergängen gibt es einen NFA M' mit ε-Übergängen, sodass $L(M) = L(M')$ und M' genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

Eindeutige Start- und Endzustände

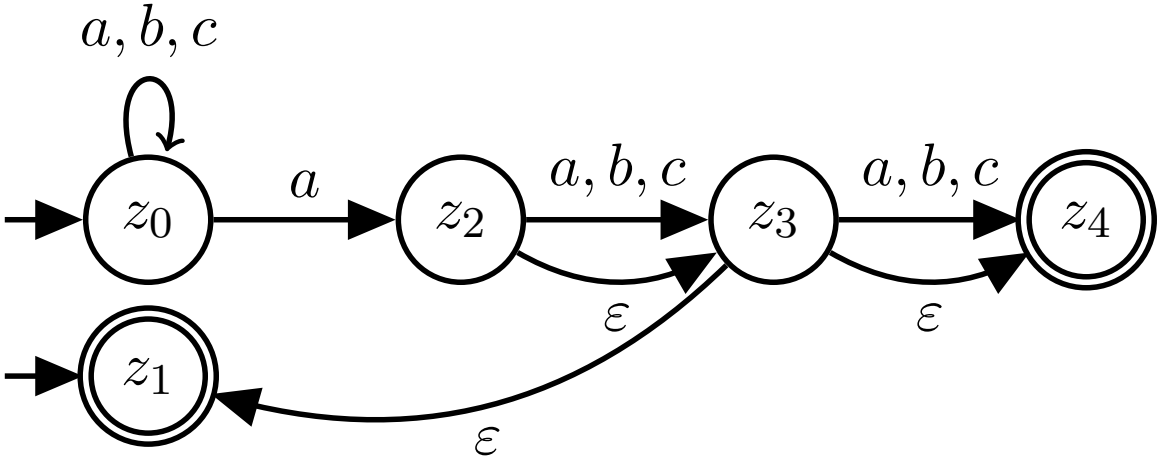
Satz 4.6.8

Für jeden NFA M mit ε-Übergängen gibt es einen NFA M' mit ε-Übergängen, sodass $L(M) = L(M')$ und M' genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

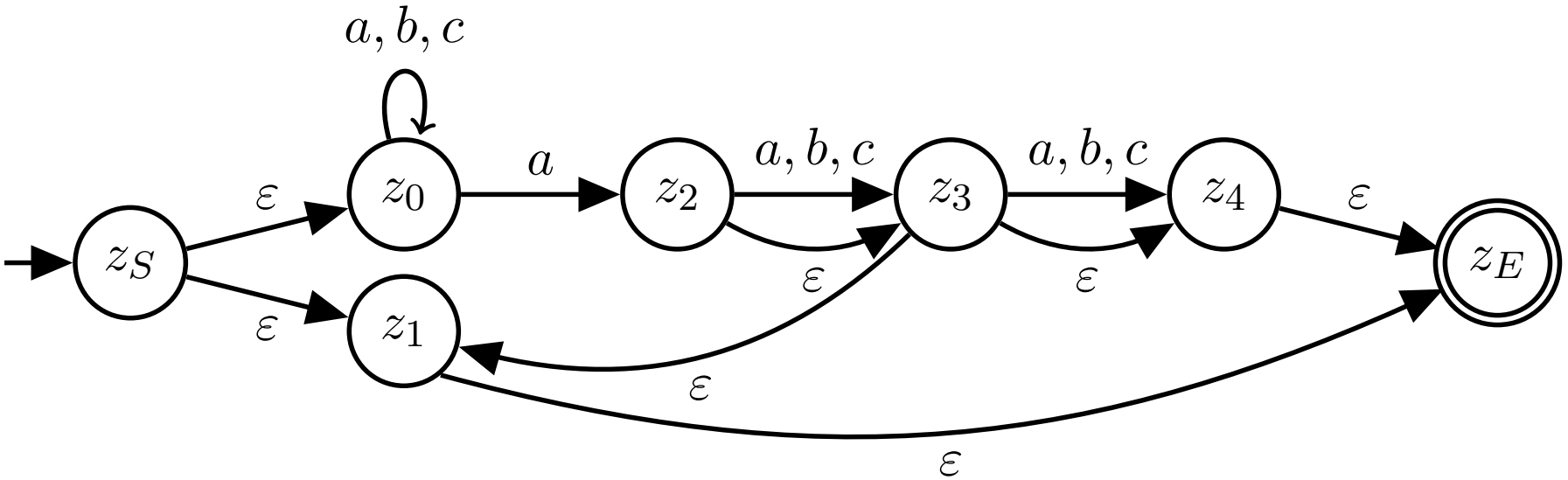
Beweis: Konstruiere M' aus M, durch Hinzufügen eines neuen Start- und eines neuen Endzustand mit ε-Übergängen:



Beispiel



wird zu



Reguläre Ausdrücke

- Reguläre Ausdrücke sind (wie Automaten und Grammatiken) ein Formalismus zur Repräsentation von Sprachen.
- Praktische Verwendung: Regex-Bibliotheken in Programmiersprachen zum Suchen und Ersetzen von Zeichenketten
  (verwenden meist erweiterte reguläre Ausdrücke)
- Aufbau regulärer Ausdrücke:
  Basisausdrücke und Operatoren zum Zusammensetzen.

Reguläre Ausdrücke (2)

Definition (Regulärer Ausdruck)

Sei Σ ein Alphabet. Ein regulärer Ausdruck über Σ ist induktiv definiert:

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck
- a mit $a \in \Sigma$ ist ein regulärer Ausdruck
- Wenn α_1 und α_2 reguläre Ausdrücke sind, dann auch $\alpha_1\alpha_2$
- Wenn α_1 und α_2 reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(\alpha_1|\alpha_2)$
- Wenn α regulärer Ausdruck ist, dann auch $(\alpha)^*$

Reguläre Ausdrücke (3)

Erzeugte Sprache

Die von einem regulären Ausdruck α erzeugte Sprache $L(\alpha)$ ist induktiv über dessen Struktur definiert:

$$\begin{aligned} L(\emptyset) &:= \emptyset \\ L(\varepsilon) &:= \{\varepsilon\} \\ L(a) &:= \{a\} \quad \text{für } a \in \Sigma \\ L(\alpha_1\alpha_2) &:= L(\alpha_1)L(\alpha_2) = \{uv \mid u \in L(\alpha_1), v \in L(\alpha_2)\} \\ L(\alpha_1|\alpha_2) &:= L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) \\ L((\alpha)^*) &:= L(\alpha)^* \end{aligned}$$

Für alle regulären Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gilt:

$$L((\alpha_1|\alpha_2)|\alpha_3) = L(\alpha_1|(\alpha_2|\alpha_3))$$

Daher lassen wir Klammern weg und schreiben $(\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n)$.

Beispiele

- $(a|b)^*aa(a|b)^*$ erzeugt alle Worte über $\{a, b\}$ die zwei aufeinanderfolgende a's enthalten
- $(\varepsilon|((a|b|c)^*a(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)))$ erzeugt alle Worte über $\{a, b, c\}$, die an viertletzter Stelle ein a haben und das leere Wort
- $((0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|1(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|(2(0|1|2|3))) :$ $((0|1|2|3|4|5)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9))$ erzeugt alle Uhrzeiten im 24-Stunden-Format
- Eine endliche Sprache $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ wird durch $(w_1| \ldots |w_n)$ erzeugt.

Satz von Kleene

Theorem 4.7.4 (Satz von Kleene)

Reguläre Ausdrücke erzeugen genau die regulären Sprachen.

Beweis in zwei Teilen:

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
2. Für jede reguläre Sprache gibt es einen regulären Ausdruck, der sie erzeugt.

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.

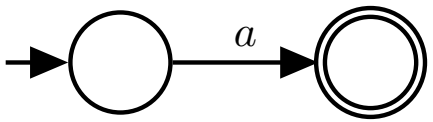
Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α

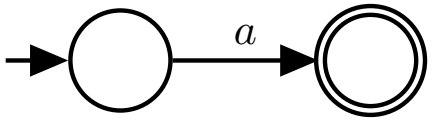
Beweis: Satz von Kleene (1)

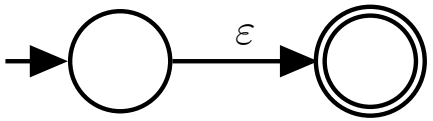
1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

Beweis: Satz von Kleene (1)

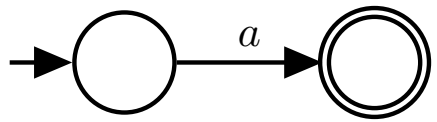
1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

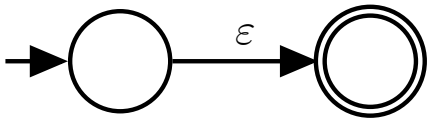
- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

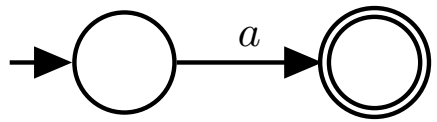
- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

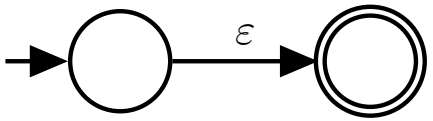
  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \emptyset$ konstruiere 

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

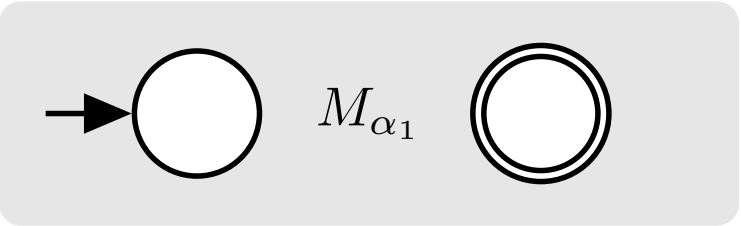
  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

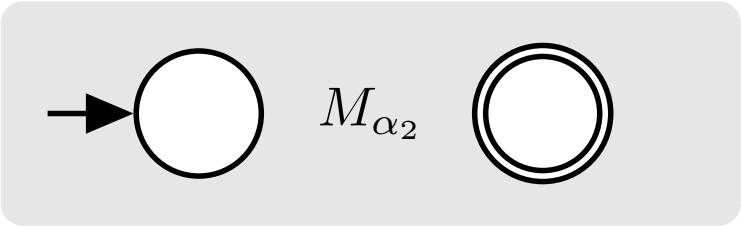
  - Für $\alpha = \emptyset$ konstruiere 

  In allen Fällen ist $L(\alpha) = L(M_\alpha)$ offensichtlich

Beweis: Satz von Kleene (2)

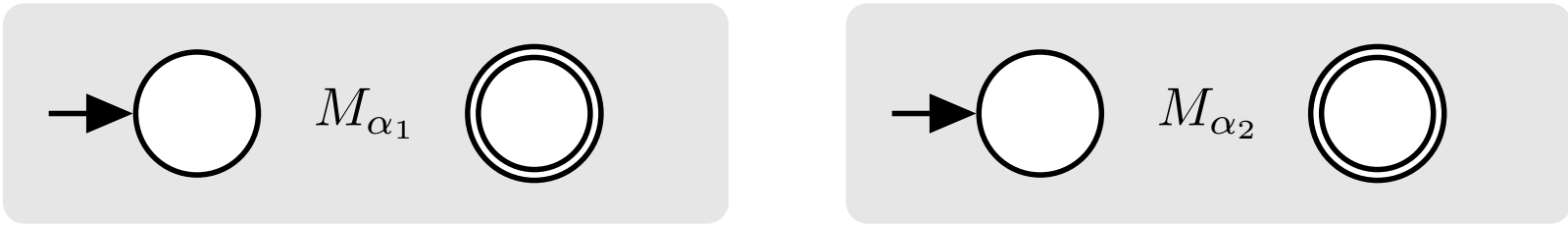
- Induktionsschritt: Betrachte den Aufbau von α (3 Fälle)
  - Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$.



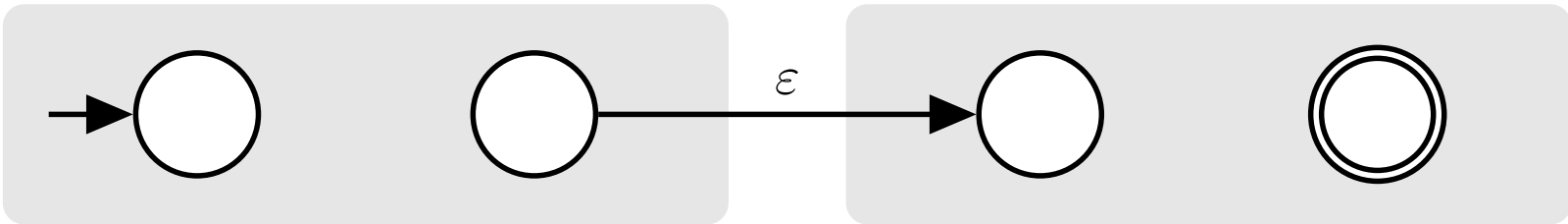


Beweis: Satz von Kleene (2)

- Induktionsschritt: Betrachte den Aufbau von α (3 Fälle)
  - Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$.

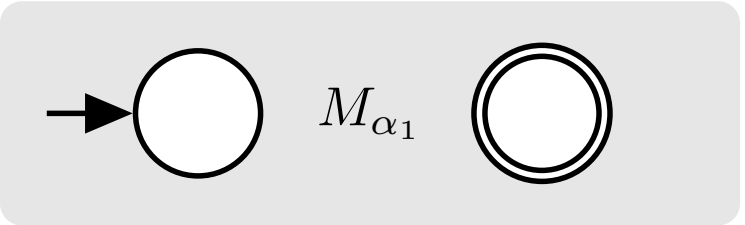


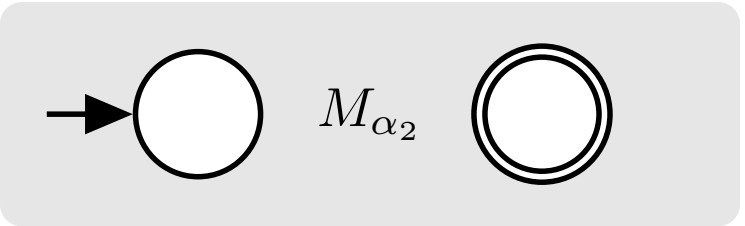
Konstruiere daraus M_α:



Beweis: Satz von Kleene (3)

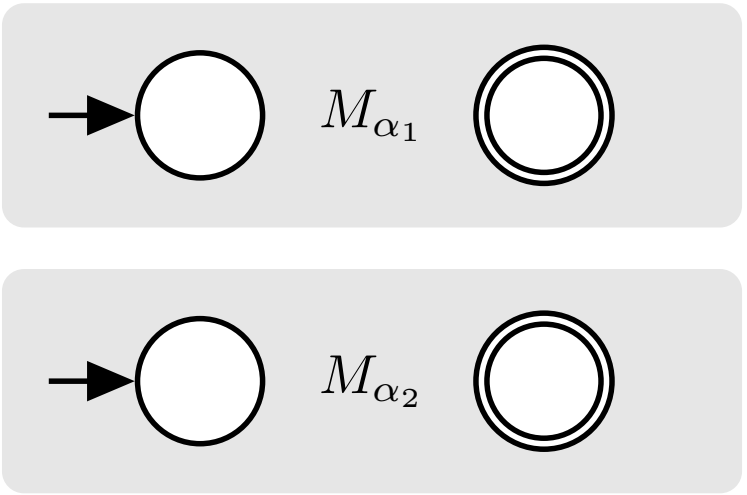
- Für $\alpha = (\alpha_1|\alpha_2)$ liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$:



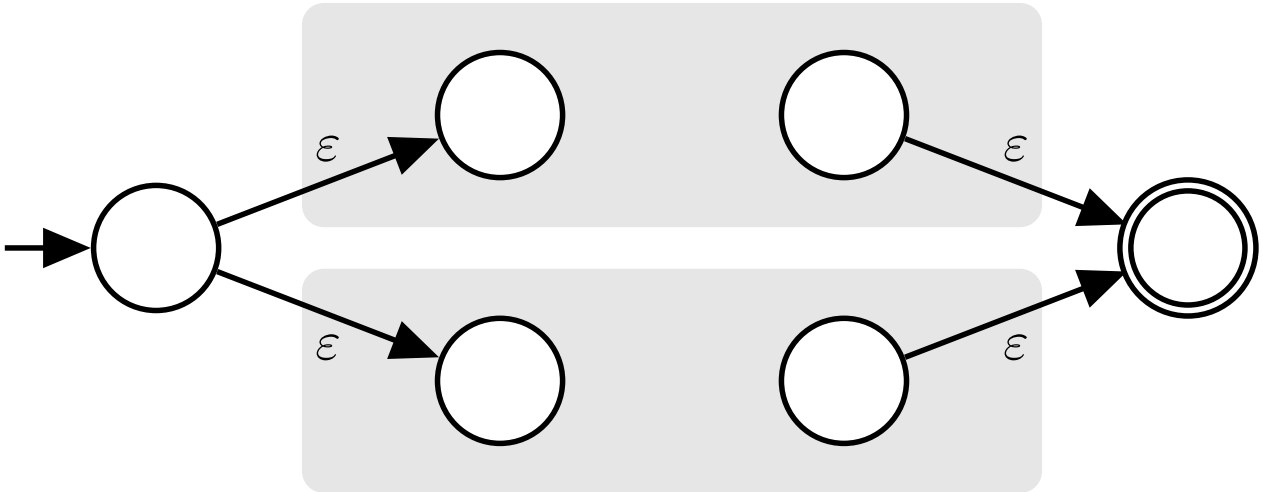


Beweis: Satz von Kleene (3)

- Für $\alpha = (\alpha_1|\alpha_2)$ liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$:

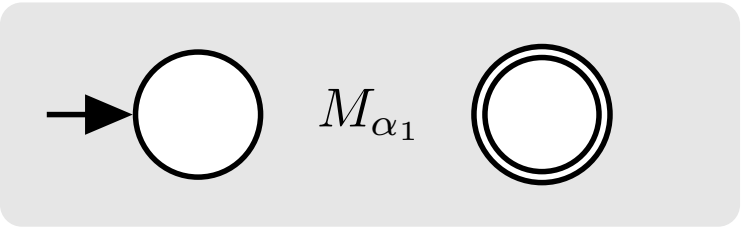


Konstruiere daraus M_α:



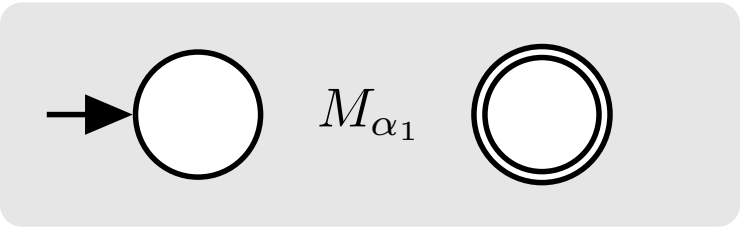
Beweis: Satz von Kleene (4)

- Für $\alpha = (\alpha_1)^*$ liefert die I.H. M_{α_1}

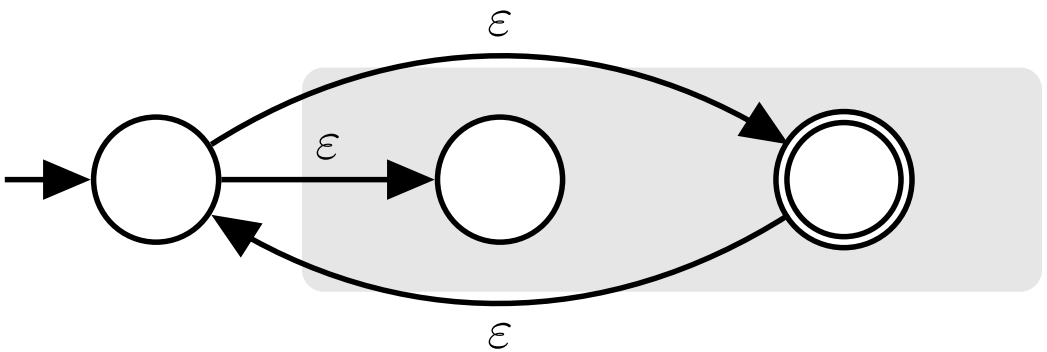


Beweis: Satz von Kleene (4)

- Für $\alpha = (\alpha_1)^*$ liefert die I.H. M_{α_1}



Konstruiere daraus M_α:



Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$
Beweis:

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und $z_i \in z$ mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$).

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und $z_i \in z$ mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$).
- Wir definieren:

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \widehat{\delta}(z_i, w) = z_j \text{ und } visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m, \\ \text{sodass für } 1 < l < m\text{: wenn } q_l = z_p \text{ dann } p \leq k \end{array} \right\}$$

$L_{i,j}^k$ enthält die Worte, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$
Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und $z_i \in z$ mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$).
- Wir definieren:

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \widehat{\delta}(z_i, w) = z_j \text{ und } visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m, \\ \text{sodass für } 1 < l < m\text{: wenn } q_l = z_p \text{ dann } p \leq k \end{array} \right\}$$

$L_{i,j}^k$ enthält die Worte, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

- Mit Induktion über k zeigen wir, dass es reguläre Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ mit $L(\alpha_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$ gibt.

Beweis: Satz von Kleene (6)

Zur Erinnerung: $L^k_{i,j}$ enthält die Worte, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Basis: $k = 0$

- Wenn $i \neq j$, dann ist $L^0_{i,j} = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$.

  Falls $L^0_{i,j} = \{a_1, \ldots, a_q\}$, dann gilt $L(\alpha^0_{i,j}) = L^0_{i,j}$ für $\alpha^0_{i,j} = (a_1| \ldots |a_q)$.

  Falls $L^0_{i,j} = \emptyset$, dann gilt $L(\alpha^0_{i,j}) = L^0_{i,j}$ mit $\alpha^0_{i,j} = \emptyset$.
- Wenn $i = j$, dann ist $L^0_{i,i} = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_i\}$.

  Sei $L^0_{i,i} = \{\varepsilon, a_1, \ldots, a_q\}$.

  Dann gilt $L(\alpha^0_{i,i}) = L^0_{i,i}$ für $\alpha^0_{i,i} = (\varepsilon|a_1| \ldots |a_q)$.

Beweis: Satz von Kleene (7)

Zur Erinnerung: $L_{i,j}^k$ enthält die Worte, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Induktionsschritt: $k \to k+1$

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k (L_{k+1,k+1}^k)^* L_{k+1,j}^k,$$

denn entweder läuft M ohne Zustand z_{k+1} zu besuchen, oder der Lauf kann in 3 Teile gespalten werden:

1. Lauf von z_i bis zum ersten Besuch des Zustands z_{k+1} (abgedeckt durch $L_{i,k+1}^k$)
2. Mehrmaliges, zyklisches Besuchen von $k+1$ (beliebig oft) (abgedeckt durch $L_{k+1,k+1}^k$)
3. Letztmaliges Verlassen von z_{k+1} und Lauf bis zu z_j (abgedeckt durch $L_{k+1,j}^k$)

Daher gilt $\alpha_{i,j}^{k+1} = (\alpha_{i,j}^k | \alpha_{i,k+1}^k (\alpha_{k+1,k+1}^k)^* \alpha_{k+1,j}^k)$ und $L(\alpha_{i,j}^{k+1}) = L_{i,j}^{k+1}$.

Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

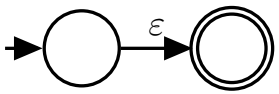
konstruieren:

Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

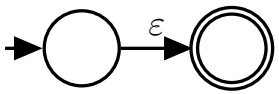


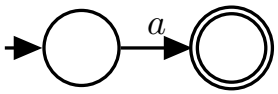
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



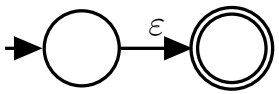


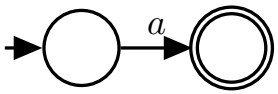
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

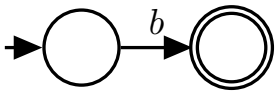
NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:





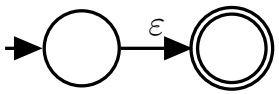


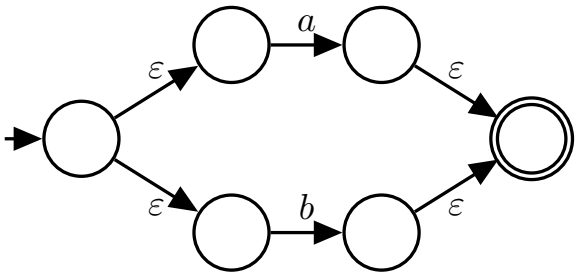
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



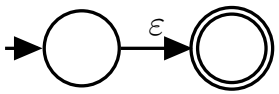


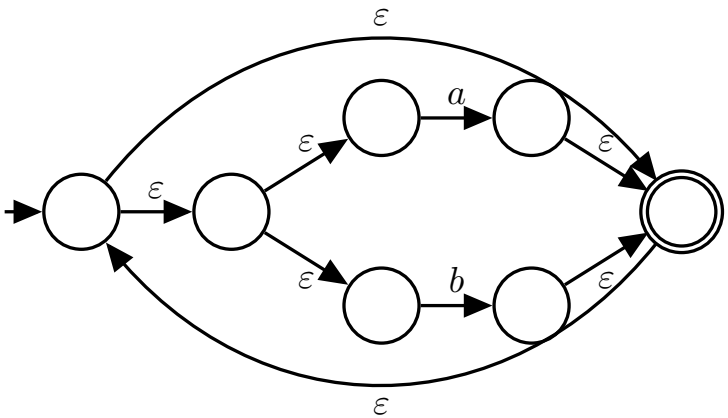
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



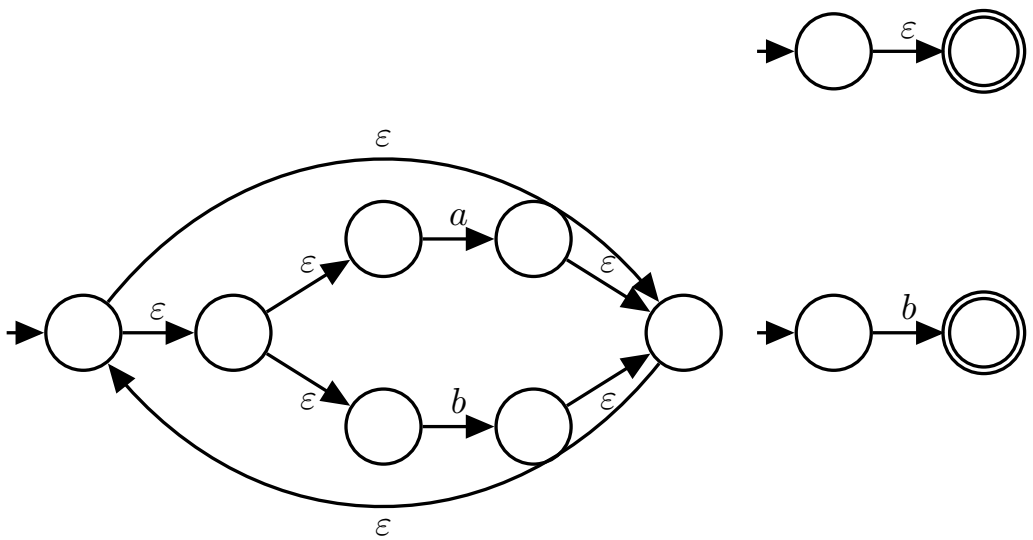


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

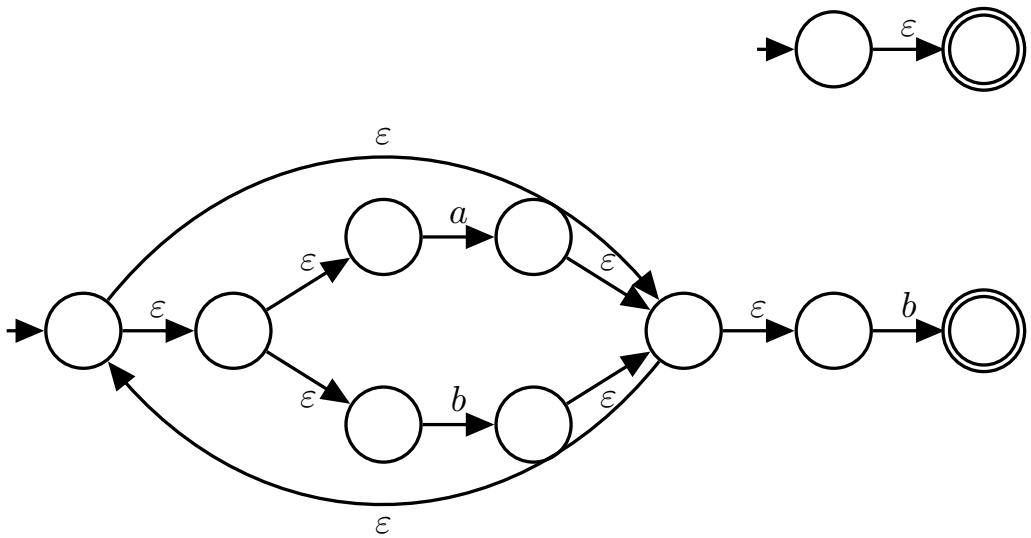


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

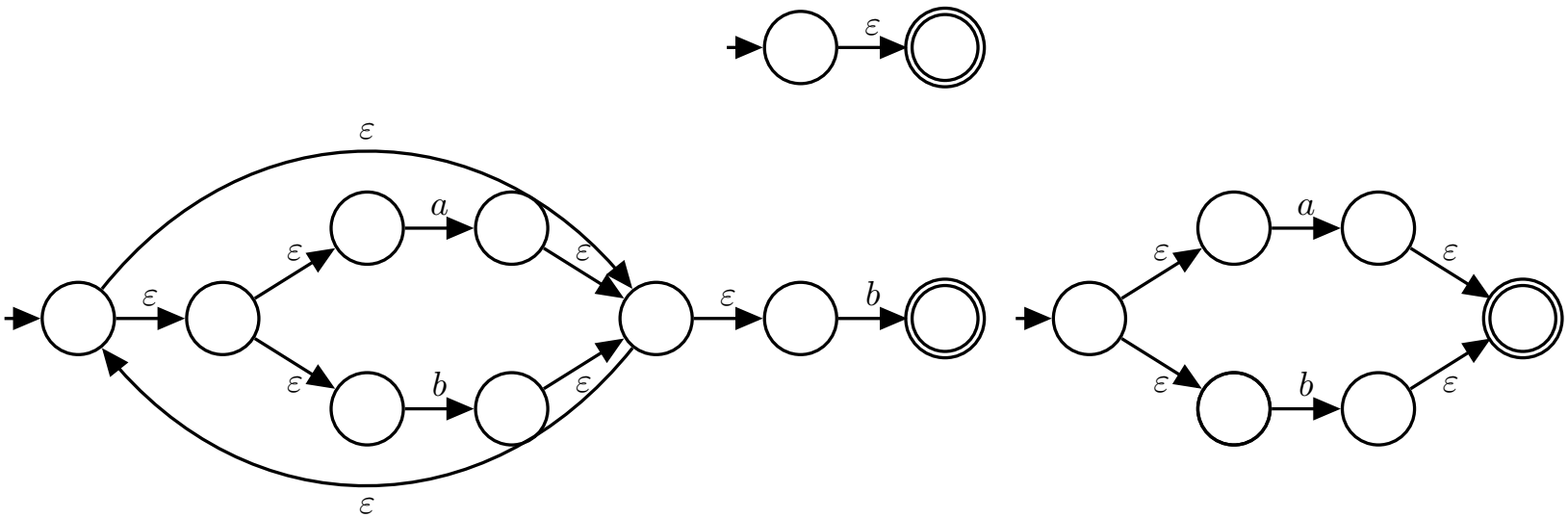


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

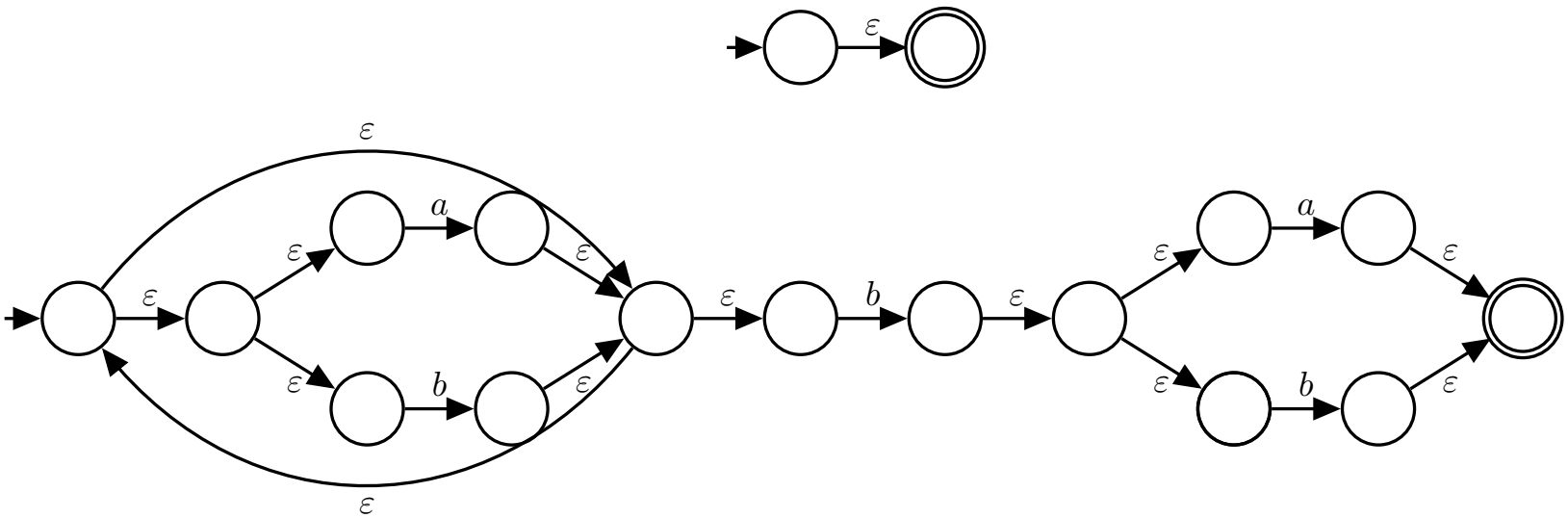


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

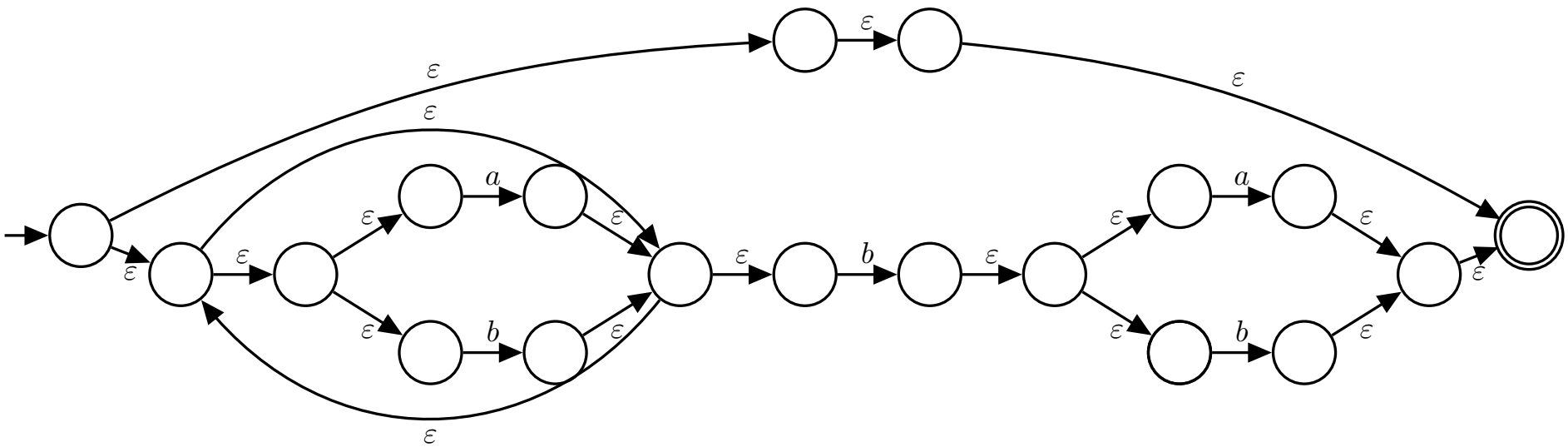


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

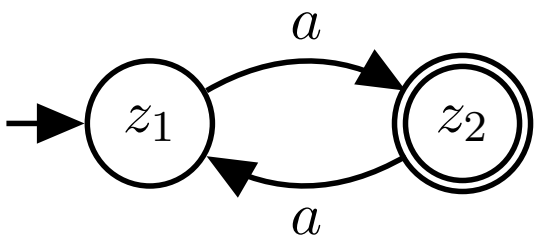
NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



Beispiel: DFA $\rightarrow$ regulärer Ausdruck



Regulärer Ausdruck dazu:

$$\begin{aligned}\alpha^2_{1,2} &= (\alpha^1_{1,2}|\alpha^1_{1,2}(\alpha^1_{2,2})^*\alpha^1_{2,2}) \\ &= ((a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,|\,(a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)^*\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a))\end{aligned}$$

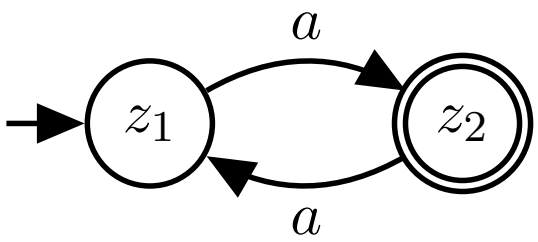
denn

$$\alpha^0_{1,1} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{2,2} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{1,2} = a \qquad \alpha^0_{2,1} = a$$

$$\alpha^1_{1,2} = (\alpha^0_{1,2}|\alpha^0_{1,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)$$

$$\alpha^1_{2,2} = (\alpha^0_{2,2}|\alpha^0_{2,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)$$

Beispiel: DFA $\rightarrow$ regulärer Ausdruck



Regulärer Ausdruck dazu:

$$\begin{aligned}\alpha^2_{1,2} &= (\alpha^1_{1,2}|\alpha^1_{1,2}(\alpha^1_{2,2})^*\alpha^1_{2,2}) \\ &= ((a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,|\,(a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)^*\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)) \\ &= (a|a(aa)^*) \text{ (durch Vereinfachung)}\end{aligned}$$

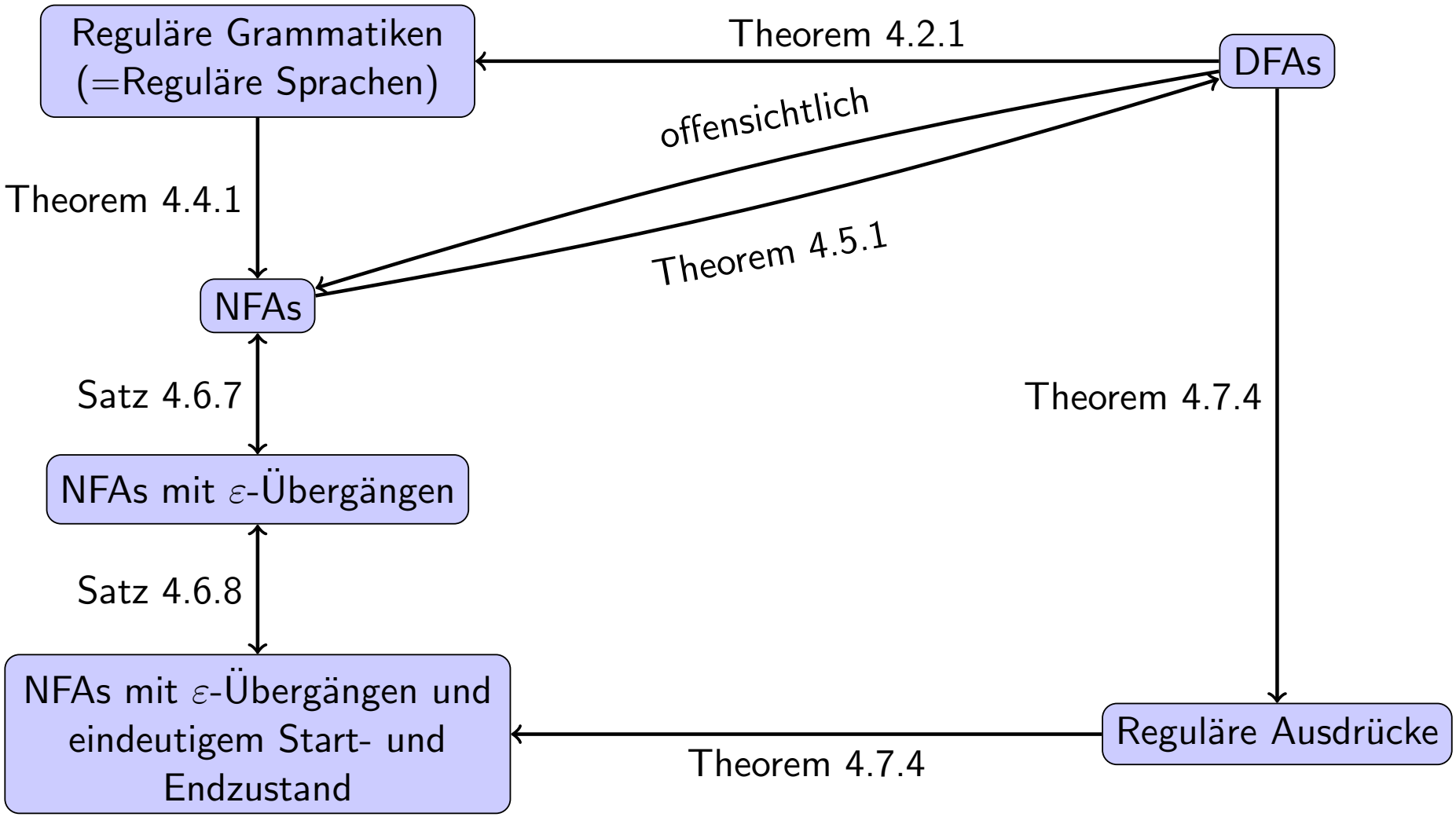
denn

$$\alpha^0_{1,1} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{2,2} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{1,2} = a \qquad \alpha^0_{2,1} = a$$

$$\alpha^1_{1,2} = (\alpha^0_{1,2}|\alpha^0_{1,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)$$

$$\alpha^1_{2,2} = (\alpha^0_{2,2}|\alpha^0_{2,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)$$

Zusammenfassung: Formalismen für reguläre Sprachen



Kanten $\rightarrow$ zeigen Kodierungen