

**Aufgabe 10-4.** Wir versuchen für noch unbekannte Mengen  $\Pi_1, \dots, \Pi_5$  eine Herleitung für

$$\emptyset \vdash \mathbf{fun}_X f x \Rightarrow x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)$$

zu konstruieren.

Wende zunächst die Regel (Fun) an:

$$\text{(Fun)} \frac{\Gamma \vdash x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\emptyset \vdash \mathbf{fun}_X f x \Rightarrow x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Diese ist anwendbar falls  $X \in \Pi_4$ . In der Regel steht  $\Gamma$  für

$$[x \mapsto ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)), f \mapsto ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)]$$

Mache nun weiter mit der Regel (App) und dann links mit (Var):

$$\begin{aligned} & \text{(Var)} \frac{\Gamma(x) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha))}{\text{(App)} \frac{\Gamma \vdash x: (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha) \quad \Gamma \vdash \mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y: (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha)}{\Gamma \vdash x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}} \\ & \text{(Fun)} \frac{\Gamma \vdash x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\emptyset \vdash \mathbf{fun}_X f x \Rightarrow x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)} \end{aligned}$$

Die Regel (App) ist anwendbar falls  $\Pi_3 = \Pi_5$ .

Wende nun rechts die Regel (Fn) an. Diese ist anwendbar falls  $Y \in \Pi_1$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \text{(Var)} \frac{\Gamma(x) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha))}{\text{(App)} \frac{\Gamma \vdash x: (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha) \quad \text{(Fn)} \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f x y: \alpha}{\Gamma \vdash \mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y: (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha)}}{\Gamma \vdash x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}} \\ & \text{(Fun)} \frac{\Gamma \vdash x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\emptyset \vdash \mathbf{fun}_X f x \Rightarrow x (\mathbf{fn}_Y y \Rightarrow f x y): ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)} \end{aligned}$$

Das noch offene Urteil  $\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f x y: \alpha$  ist nun ohne weitere Einschränkung herleitbar. Eine Herleitung dafür ist:

$$\frac{\frac{\Gamma[y \mapsto \alpha](f) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f : ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)} \quad \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha](x) = (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash x : (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)} \quad \frac{\Gamma[y \mapsto \alpha](y) = \alpha}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash y : \alpha}}{\frac{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f x : \alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f x y : \alpha}}$$

Die Wahl der Regeln war jeweils durch den Term eindeutig bestimmt. Wir haben also gezeigt, dass sich eine Herleitung angeben lässt genau dann wenn die Bedingungen  $X \in \Pi_4$ ,  $\Pi_3 = \Pi_5$  und  $Y \in \Pi_1$  erfüllt sind. Das ist gerade in b) und c) der Fall.