

## Übungen zur Vorlesung Formale Spezifikation und Verifikation

Blatt 9

**Aufgabe 9-1** Sei  $L$  ein vollständiger Verband und sei  $f: L \rightarrow L$  eine monotone Funktion. Definiere Folgen  $(x_i)_{i \geq 0}$  und  $(y_i)_{i \geq 0}$  von Elementen von  $L$  durch  $x_0 := \perp$  und  $x_{i+1} := f(x_i)$  sowie  $y_0 := \top$  und  $y_{i+1} := f(y_i)$ .

Zeigen Sie:

- Für alle  $i$  gilt  $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$  und  $y_i \sqsupseteq y_{i+1}$ .
- Angenommen  $x$  ist ein Fixpunkt von  $f$ , d.h. es gilt  $x = f(x)$ . Dann gilt  $x_i \sqsubseteq x$  und  $x \sqsubseteq y_i$  für alle  $i$ .
- Gilt  $x_i = x_{i+1}$ , so ist  $x_i$  der kleinste Fixpunkt von  $f$ .
- Gilt  $y_i = y_{i+1}$ , so ist  $y_i$  der größte Fixpunkt von  $f$ .

**Aufgabe 9-2** Sei  $L = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  der vollständige Verband der Teilmengen von  $\mathbb{N}$ . Bestimmen Sie kleinsten und größten Fixpunkt der folgenden monotonen Funktionen.

- $F(X) = \{x + 1 \mid x \in X\}$ .
- $F(X) = \{5\} \cup \{x \mid x + 1 \in X\}$ .

**Aufgabe 9-3** Sei  $P$  das Programm

$[x := 0]^1; \text{ while } [x < 23]^2 \text{ do } ([y := x + 1]^3; [x := y * 2]^4); [r := y]^5 .$

Geben Sie eine Herleitung des Urteils

$P: \{(x, ?), (y, ?), (r, ?)\} \rightarrow \{(x, 1), (x, 4), (y, 3), (y, ?), (r, 5)\}$

im Typsystem für Reaching Definitions an.

**Aufgabe 9-4** Geben Sie Herleitungen für folgende Typurteile an.

$\vdash \text{fn } f \Rightarrow \text{fn } x \Rightarrow f \ x : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int})$   
 $\vdash \text{fun } f \ x \Rightarrow \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x * (f \ (x - 1)): \text{int} \rightarrow \text{int}$