

Übungen zur Vorlesung Formale Spezifikation und Verifikation

Blatt 9

Aufgabe 9-1 Sei L ein vollständiger Verband und sei $f: L \rightarrow L$ eine monotone Funktion. Definiere Folgen $(x_i)_{i \geq 0}$ und $(y_i)_{i \geq 0}$ von Elementen von L durch $x_0 := \perp$ und $x_{i+1} := f(x_i)$ sowie $y_0 := \top$ und $y_{i+1} := f(y_i)$.

Zeigen Sie:

- Für alle i gilt $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$ und $y_i \sqsupseteq y_{i+1}$.
- Angenommen x ist ein Fixpunkt von f , d.h. es gilt $x = f(x)$. Dann gilt $x_i \sqsubseteq x$ und $x \sqsubseteq y_i$ für alle i .
- Gilt $x_i = x_{i+1}$, so ist x_i der kleinste Fixpunkt von f .
- Gilt $y_i = y_{i+1}$, so ist y_i der größte Fixpunkt von f .

Aufgabe 9-2 Sei $L = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ der vollständige Verband der Teilmengen von \mathbb{N} . Bestimmen Sie kleinsten und größten Fixpunkt der folgenden monotonen Funktionen.

- $F(X) = \{x + 1 \mid x \in X\}$.
- $F(X) = \{5\} \cup \{x \mid x + 1 \in X\}$.

Aufgabe 9-3 Sei P das Programm

```
[x := 0]1; while [x < 23]2 do ([y := x + 1]3; [x := y * 2]4); [r := y]5 .
```

Geben Sie eine Herleitung des Urteils

$$P: \{(x, ?), (y, ?), (r, ?)\} \rightarrow \{(x, 1), (x, 4), (y, 3), (y, ?), (r, 5)\}$$

im Typsystem für Reaching Definitions an.

Aufgabe 9-4 Geben Sie Herleitungen für folgende Typurteile an.

```
⊢ fn f ⇒ fn x ⇒ f x : (int → int) → (int → int)
⊢ fun f x ⇒ if x = 0 then 1 else x * (f (x - 1)): int → int
```