Aufgabe 9-3. Wir versuchen für noch unbekannte Mengen $\Pi_1, \ldots, \Pi_5$ eine Herleitung für

$$\varnothing \vdash \mathtt{fun}_X\ f\ x \Rightarrow x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)$$

zu konstruieren.

Wende zunächst die Regel (Fun) an:

$$\text{(Fun)}\ \dfrac{\Gamma \vdash x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\varnothing \vdash \mathtt{fun}_X\ f\ x \Rightarrow x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Diese ist anwendbar falls $X \in \Pi_4$. In der Regel steht Γ für

$$[x \mapsto ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)), f \mapsto ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)]$$

.

Mache nun weiter mit der Regel (App) und dann links mit (Var):

$$\text{(Fun)}\ \dfrac{\text{(App)}\ \dfrac{\text{(Var)}\ \dfrac{\Gamma(x) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha))}{\Gamma \vdash x \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)} \qquad \Gamma \vdash \mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha)}{\Gamma \vdash x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}}{\varnothing \vdash \mathtt{fun}_X\ f\ x \Rightarrow x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Die Regel (App) ist anwendbar falls $\Pi_3 = \Pi_5$.

Wende nun rechts die Regel (Fn) an. Diese ist anwendbar falls $Y \in \Pi_1$. Wir erhalten

$$\text{(Fun)}\ \dfrac{\text{(App)}\ \dfrac{\text{(Var)}\ \dfrac{\Gamma(x) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha))}{\Gamma \vdash x \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)} \qquad \text{(Fn)}\ \dfrac{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\ y \colon \alpha}{\Gamma \vdash \mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha)}}{\Gamma \vdash x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}}{\varnothing \vdash \mathtt{fun}_X\ f\ x \Rightarrow x\ (\mathtt{fn}_Y\ y \Rightarrow f\ x\ y) \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}$$

Das noch offene Urteil $\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\ y \colon \alpha$ ist nun ohne weitere Einschränkung herleitbar. Eine Herleitung dafür ist:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\Gamma[y \mapsto \alpha](f) = ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f \colon ((\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)) \xrightarrow{\Pi_4} (\alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha)}
\quad
\dfrac{\Gamma[y \mapsto \alpha](x) = (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash x \colon (\alpha \xrightarrow{\Pi_1} \alpha) \xrightarrow{\Pi_2} (\alpha \xrightarrow{\Pi_3} \alpha)}
}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x \colon \alpha \xrightarrow{\Pi_5} \alpha}
\quad
\dfrac{\Gamma[y \mapsto \alpha](y) = \alpha}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash y \colon \alpha}
}{\Gamma[y \mapsto \alpha] \vdash f\ x\ y \colon \alpha}
$$

Die Wahl der Regeln war jeweils durch den Term eindeutig bestimmt. Wir haben also gezeigt, dass sich eine Herleitung angeben lässt genau dann wenn die Bedingungen $X \in \Pi_4$, $\Pi_3 = \Pi_5$ und $Y \in \Pi_1$ erfüllt sind. Das ist gerade in b) und c) der Fall.