Aufgabe 9-1.

Abkürzungen:
$e = (\texttt{fun}_F\ f\ x \Rightarrow \texttt{if}\ x = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ x * (f\ (x-1)))$,
$e_1 = \texttt{fn}_E\ x \Rightarrow \texttt{if}\ x = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ x * (e\ (x-1))$.

$$\dfrac{\text{(Fun)}\ \dfrac{}{e \longrightarrow e_1} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \text{(If2)}\ \dfrac{\text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{0 \longrightarrow 0} \quad (3=0) = \texttt{false}}{3 = 0 \longrightarrow \texttt{false}} \quad \text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \dfrac{\Pi_2}{e\ (3-1) \longrightarrow 2} \quad 3 * 2 = 6}{3 * (e\ (3-1)) \longrightarrow 6}}{\texttt{if}\ 3 = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ 3 * (e\ (3-1)) \longrightarrow 6}}{\text{(App)}\ \dfrac{}{e\ 3 \longrightarrow 6}}$$

Dabei steht Π_2 für folgende Herleitung:

$$\dfrac{\text{(Fun)}\ \dfrac{}{e \longrightarrow e_1} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad (3-1) = 2}{3 - 1 \longrightarrow 2} \quad \text{(If2)}\ \dfrac{\text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{2 \longrightarrow 2} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{0 \longrightarrow 0} \quad (2=0) = \texttt{false}}{2 = 0 \longrightarrow \texttt{false}} \quad \text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{2 \longrightarrow 2} \quad \dfrac{\Pi_1}{e\ (2-1) \longrightarrow 1} \quad 2 * 1 = 2}{2 * (e\ (2-1)) \longrightarrow 2}}{\texttt{if}\ 2 = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ 2 * (e\ (2-1)) \longrightarrow 2}}{\text{(App)}\ \dfrac{}{e\ (3-1) \longrightarrow 2}}$$

Dabei steht Π_1 für die analoge Herleitung:

$$\dfrac{\text{(Fun)}\ \dfrac{}{e \longrightarrow e_1} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{2 \longrightarrow 2} \quad \text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad (2-1) = 1}{2 - 1 \longrightarrow 1} \quad \text{(If2)}\ \dfrac{\text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{0 \longrightarrow 0} \quad (1=0) = \texttt{false}}{1 = 0 \longrightarrow \texttt{false}} \quad \text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \dfrac{\Pi_0}{e\ (1-1) \longrightarrow 1} \quad 1 * 1 = 1}{1 * (e\ (1-1)) \longrightarrow 1}}{\texttt{if}\ 1 = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ 1 * (e\ (1-1)) \longrightarrow 1}}{\text{(App)}\ \dfrac{}{e\ (2-1) \longrightarrow 1}}$$

Schließlich ist Π_0 folgende Herleitung:

$$\dfrac{\text{(Fun)}\ \dfrac{}{e \longrightarrow e_1} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad (1-1) = 0}{1 - 1 \longrightarrow 0} \quad \text{(If1)}\ \dfrac{\text{(Op)}\ \dfrac{\text{(Con)}\ \dfrac{}{0 \longrightarrow 0} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{0 \longrightarrow 0} \quad (0=0) = \texttt{false}}{0 = 0 \longrightarrow \texttt{true}} \quad \text{(Con)}\ \dfrac{}{1 \longrightarrow 1}}{\texttt{if}\ 0 = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ 0 * (e\ (0-1)) \longrightarrow 1}}{\text{(App)}\ \dfrac{}{e\ (1-1) \longrightarrow 1}}$$