Prof. Martin Hofmann
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
SS 2014

Übungen zur Vorlesung
Formale Spezifikation und Verifikation

Blatt 8

Aufgabe 8-1 Geben Sie Herleitungen für folgende Typurteile an.

$$\vdash (\texttt{fun}\ f\ x \Rightarrow x\ (f\ x))\ :\ ((\texttt{int} \to \texttt{int}) \to (\texttt{int} \to \texttt{int})) \to (\texttt{int} \to \texttt{int})$$

$$\vdash (\texttt{fn}\ f \Rightarrow \texttt{fn}\ x \Rightarrow \texttt{if}\ x = 0\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ x * (f\ (x-1)))\ :\ (\texttt{int} \to \texttt{int}) \to (\texttt{int} \to \texttt{int})$$

Aufgabe 8-2 (3 Punkte)

a) Bestimmen Sie:

   i) $\mathcal{U}(\alpha \to \beta, (\texttt{int} \to \texttt{bool}) \to \alpha)$
   ii) $\mathcal{U}(\alpha \to \beta, \alpha)$
   iii) $\mathcal{U}((\alpha \to \gamma) \to \beta, \beta \to (\gamma \to \alpha))$

b) Führen Sie die Typinferenz für den Term $\texttt{fun}\ f\ x \Rightarrow x\ (f\ x)$ aus, d.h. berechnen Sie

$$\mathcal{W}(\varnothing, (\texttt{fun}\ f\ x \Rightarrow x\ (f\ x)))\ .$$

Verwenden Sie zusätzlich zu den bereits in der Vorlesung angegebenen Definitionsregeln folgende Regel (App) für Funktionsapplikation.

$$(\text{App})\ \frac{\mathcal{W}(\Gamma, e_0) = (\theta_0, \tau_0) \qquad \mathcal{W}(\Gamma[\theta_0], e_1) = (\theta_1, \tau_1) \qquad \theta_2 = \mathcal{U}(\tau_0[\theta_1], \tau_1 \to \gamma) \qquad \gamma \text{ frisch}}{\mathcal{W}(\Gamma, e_0\ e_1) = (\theta_0; \theta_1; \theta_2, \gamma[\theta_2])}$$

Aufgabe 8-3 Definieren Sie einen Term e, der folgender Spezifikation genügt:

a) Das Typurteil $\varnothing \vdash e \colon \texttt{int} \to (\tau \to \tau) \to (\tau \to \tau)$ soll für jeden beliebigen Typ τ herleitbar sein.

b) Seien m eine $\texttt{int}$-Konstante. Seien e_1 und e_2 Werte mit $\varnothing \vdash e_1 \colon \tau \to \tau$ und $\varnothing \vdash e_2 \colon \tau$ für einen beliebigen Typ τ.

   Dann soll in der operationellen Semantik der funktionalen Sprache $e\ m\ e_1\ e_2 \longrightarrow v$ herleitbar sein genau dann wenn $\underbrace{e_1\ (e_1\ (\ldots (e_1}_{m \text{ mal}}\ e_2))) \longrightarrow v$ herleitbar ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass Funktionsapplikation hier wie in SML linksassoziativ ist, d.h. der Term $e\ m\ e_1\ e_2$ entspricht $((e\ m)\ e_1)\ e_2$.

Aufgabe 8-4 Es sei $L = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ der vollständige Verband der Teilmengen von $\mathbb{N}$.

a) Begründen Sie, dass die Funktion $F(X) = \mathbb{N} \setminus X$ keinen Fixpunkt besitzt.

b) Warum steht das nicht im Widerspruch zur in der Vorlesung bewiesenen Existenz größter und kleinster Fixpunkte

c) Sei nun $F(X) = \{x{+}1 \mid x \in X\}$. Bestimmen Sie den kleinsten und den größten Fixpunkt dieses Operators. Hilfe: Sie können von $\emptyset$, bzw. $\mathbb{N}$ ausgehend iterieren (immer wieder F anwenden) und schauen, wohin es geht. Wenn Sie dann eine Vermutung haben, können Sie wie in der Vorlesung gezeigt nachweisen, dass Ihre Kandidaten tatsächlich größter und kleinster Fixpunkt sind.

d) Selbe Frage für $F(X) = \{x \mid x + 1 \in X\}$.

e) Selbe Frage für $F(X) = X \setminus \{nx \mid n > 1, x = \min(X \setminus 1)\}$. "Wegstreichen der echten Vielfachen des kleinsten Elements außer 1"

f) Selbe Frage für $F(X) = \{3\} \cup \{(2 + \min X)x \mid x \in X\}$ (Achtung $0 \in \mathbb{N}$). Hier genügt es, drei Elemente des kleinsten Fixpunkts anzugeben und ein von diesen Verschiedenes des größten Fixpunkts.